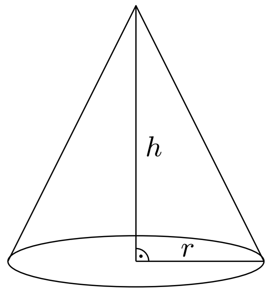
Funktionen in 2 Variablen

Das Volumen V eines Drehkegels hängt von der Höhe h und vom Radius r ab.
Die Formel für das Volumen haben wir mithilfe der Integralrechnung hergeleitet:



$$V(h, r) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Berechne das Volumen eines Drehkegels mit 5 cm Höhe und 3 cm Radius:

$$V(5, 3) = \frac{9 \cdot \pi \cdot 5}{3} = 47{,}12\ldots\,\text{cm}^3$$

Wenn wir Höhe und Radius eines Drehkegels kennen, dann können wir sein Volumen berechnen.
Diese Zuordnung ist eine **Funktion V in 2 Variablen**:

$$(h, r) \mapsto V(h, r), \qquad h, r \geq 0.$$

Der Funktionsgraph von V ist die rechts dargestellte Fläche im 3-dimensionalen Raum.

Zum Beispiel liegt der Punkt

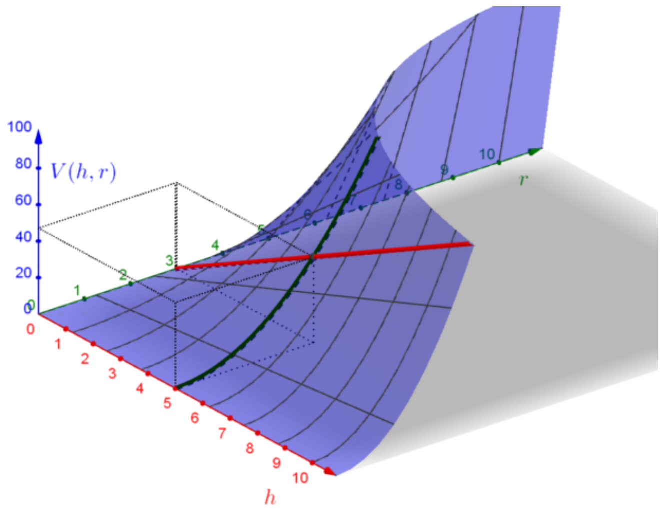
$(h \mid r \mid V(h, r)) = (5\,\text{cm} \mid 3\,\text{cm} \mid 47{,}12\ldots\,\text{cm}^3)$

auf dem Funktionsgraphen.

Lassen wir den Radius $r = 3$ cm unverändert, dann ist die Zuordnung

$$h \mapsto V(h, 3) = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = 3 \cdot \pi \cdot h$$

eine lineare Funktion.



Im Bild oben ist diese Funktion in roter Farbe grafisch dargestellt.

Für jede Zahl r können wir die Ableitung der Funktion $h \mapsto V(h, r) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$ berechnen.

Die Funktion $(h, r) \mapsto \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 1}{3}$ heißt dann **partielle Ableitung von V nach h**.

Lassen wir die Höhe $h = 5$ cm unverändert, dann ist die Zuordnung

$$r \mapsto V(5, r) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 5}{3}$$

eine quadratische Funktion.

Im Bild oben ist diese Funktion in grüner Farbe grafisch dargestellt.

Für jede Zahl h können wir die Ableitung der Funktion $r \mapsto V(h, r) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$ berechnen.

Die Funktion $(h, r) \mapsto \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot h}{3}$ heißt dann **partielle Ableitung von V nach r**.

Funktionen in mehreren Variablen

Die Funktion $(a, b, c) \mapsto a \cdot b \cdot c$ ist eine Funktion in 3 Variablen. Fällt dir ein passender Kontext ein?

Zum Beispiel: $V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$ (Volumen eines Quaders mit Kantenlängen a, b, c)

Partielle Ableitungen

Die Funktion f mit $f(x,y) = 3\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y + 42$ können wir nach x und nach y differenzieren.
Wir verwenden dazu die folgende Schreibweise.

Partielle Ableitung von f nach x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6\cdot x - 2\cdot y$$

Sprechweise: „$D\ f$ nach $D\ x$"

Partielle Ableitung von f nach y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\cdot x$$

Sprechweise: „$D\ f$ nach $D\ y$"

Wir können auch partielle Ableitungen höherer Ordnung berechnen:

2 Mal nach x ableiten: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$ Zuerst nach x, dann nach y ableiten: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -2$

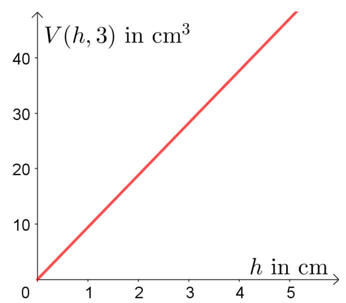
2 Mal nach y ableiten: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ Zuerst nach y, dann nach x ableiten: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -2$

Ist eine Funktion in jeder Variable beliebig oft differenzierbar, dann kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen an. Es ist nur wichtig, wie oft insgesamt nach den jeweiligen Variablen differenziert wird. Das sagt der Satz von Schwarz aus.

Interpretation der partiellen Ableitungen

$V(h,r) = \frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}$ ist das Volumen eines Drehkegels mit Höhe h und Radius r.

Wir nehmen Drehkegel mit Radius $r = 3\,\text{cm}$:
Der Graph der linearen Funktion
$h \mapsto V(h,3)$ ist dargestellt:



Die partielle Ableitung nach h

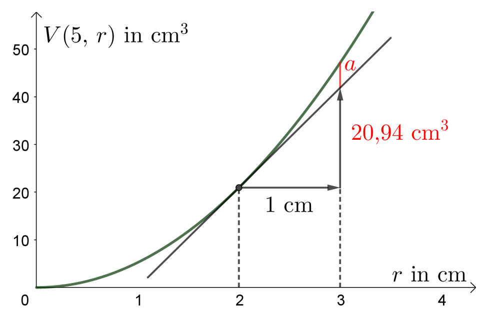
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{r^2\cdot\pi}{3} = \frac{9\cdot\pi}{3}$$

hat an jeder Stelle den Wert $9{,}42\ldots\,\text{cm}^2$.

Die partielle Ableitung nach h können wir also folgendermaßen interpretieren:
Ein Drehkegel mit Radius $3\,\text{cm}$ ist gegeben.
Vergrößern wir seine Höhe um $1\,\text{cm}$,
dann vergrößert sich sein Volumen

um $9{,}42\ldots\,\text{cm}^3$.

Wir nehmen Drehkegel mit Höhe $h = 5\,\text{cm}$:
Der Graph der quadratischen Funktion
$r \mapsto V(5,r)$ ist dargestellt:



Die partielle Ableitung von V nach r

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\cdot r\cdot\pi\cdot h}{3} = \frac{10\cdot r\cdot\pi}{3}$$

hat an der Stelle $r = 2$ den Wert $20{,}94\ldots\,\text{cm}^2$.
Beschrifte das zugehörige Steigungsdreieck oben.

Die partielle Ableitung nach r an der Stelle $r = 2$ können wir also folgendermaßen interpretieren:
Ein Drehkegel mit Höhe $h = 5\,\text{cm}$ ist gegeben.
Vergrößern wir seinen Radius von $r = 2\,\text{cm}$ auf $r = 3\,\text{cm}$, dann vergrößert sich sein Volumen

näherungsweise um $20{,}94\ldots\,\text{cm}^3$.

Wie groß ist dabei der absolute Fehler a?

$$a = V(5,3) - V(5,2) - 20{,}94\ldots = 5{,}23\ldots\,\text{cm}^3$$