



Bei einer **geometrischen Folge** (b_n) kommt man von einem zum nächsten Folgenglied, indem man immer mit dem gleichen Faktor $q \neq 0$ multipliziert:

- $b_2 = b_1 \cdot q$ mit $b_1 \neq 0$
- $b_3 = b_2 \cdot q$
- $b_{n+1} = b_n \cdot q$ für alle $n \geq 1$

$$(b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; b_{n+1}; \dots)$$

Zum Beispiel:

$$(b_n) = (3; 6; 12; 24; 48; \dots)$$

Bei einer geometrischen Folge ist der **Quotient** q aufeinander folgender Glieder konstant:

$$\frac{b_2}{b_1} = q, \quad \frac{b_3}{b_2} = q, \quad \dots \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \quad \text{für alle } n \geq 1$$



Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

- Die geometrische Folge $(a_n) = (2; 6; 18; 54; 162; \dots)$ hat den Quotienten $q = 3$.
- Die geometrische Folge $(b_n) = (4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots)$ hat den Quotienten $q = \frac{1}{2}$.
- Die geometrische Folge $(c_n) = (\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1; -2; 4; \dots)$ hat den Quotienten $q = -2$.
- Die geometrische Folge $(d_n) = (-3; -3; -3; -3; -3; \dots)$ hat den Quotienten $q = 1$.



Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1} = (2; 6; 18; 54; \dots)$.

- Ermittle ein **rekursives Bildungsgesetz** für (b_n) .

$$b_{n+1} = b_n \cdot 3 \quad \text{mit} \quad b_1 = 2$$

- Berechne b_{15} .

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von b_1 zu b_{15} ?

$$b_{15} = 2 \cdot 3^{14} = 9\,565\,938$$

- Berechne b_{42} . Wie viele Stellen hat das Ergebnis?

$$b_{42} = 2 \cdot 3^{41} = 7,29\dots \cdot 10^{19} \implies \text{20-stellige Zahl}$$

- Ermittle ein **explizites Bildungsgesetz** für (b_n) .

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von b_1 zu b_n ?

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$



Allgemein hat jede geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit Quotient q die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $b_{n+1} = b_n \cdot q$ und Angabe von b_1
- **Explizites Bildungsgesetz:** $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

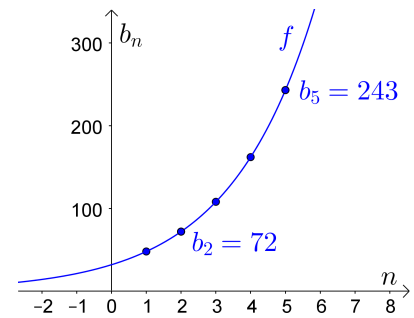


Die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $b_2 = 72$ und $b_5 = 243$.

- 1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (b_n) .
- 2) Rechts sind die beiden Folgenglieder b_2 und b_5 in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Graph der Exponentialfunktion f mit

$$f(x) = c \cdot a^x$$

enthält diese beiden Punkte. Ermittle die Parameter a und c .



- 3) Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 4 200 000 ?

$$1) \quad b_5 = b_2 \cdot q^3 \implies q = \sqrt[3]{\frac{b_5}{b_2}} = 1,5$$

$$b_2 = b_1 \cdot q \implies b_1 = \frac{b_2}{q} = 48$$

Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot 1,5$ mit $b_1 = 48$

Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 48 \cdot 1,5^{n-1}$

$$2) \quad f(n) = b_n = 48 \cdot 1,5^{n-1} = 48 \cdot 1,5^n \cdot 1,5^{-1} = 32 \cdot 1,5^n$$

$$\implies a = 1,5 \text{ und } c = 32$$

$$3) \quad b_n > 4\,200\,000 \iff 1,5^{n-1} > 87\,500 \iff (n-1) \cdot \lg(1,5) > \lg(87\,500) \iff n > 29,06\dots$$

Ab dem 30. Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 4 200 000.



Die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $b_4 = 4$ und $b_9 = -128$.

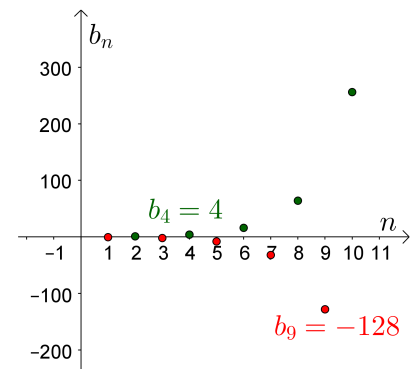
Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (b_n) .

$$b_9 = b_4 \cdot q^5 \implies q = \sqrt[5]{\frac{b_9}{b_4}} = -2$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 \implies b_1 = \frac{b_4}{q^3} = -0,5$$

Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot (-2)$ mit $b_1 = -0,5$

Explizites Bildungsgesetz: $b_n = -0,5 \cdot (-2)^{n-1}$





Für die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ gilt: $b_n = -0,5 \cdot (-2)^{n-1}$

Das wievielte Folgenglied hat den Wert -2048 ?

1) Felix rechnet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} b_n &= -2048 \\ -0,5 \cdot (-2)^{n-1} &= -2048 \\ (-2)^{n-1} &= 4096 \\ (n-1) \cdot \lg(-2) &= \lg(4096) \\ n &= \frac{\lg(4096)}{\lg(-2)} + 1 = \zeta \end{aligned}$$

Beim Versuch $\frac{\lg(4096)}{\lg(-2)} + 1$ zu berechnen, zeigt sein Taschenrechner **zurecht** eine Fehlermeldung an.

In welchem Rechenschritt ist Felix ein Fehler passiert?

Die Rechenregel $\lg(a^r) = r \cdot \lg(a)$ stimmt nur für $a > 0$.

Der Logarithmus $\lg(a)$ ist für $a < 0$ *nicht* definiert.

Der TR liefert deshalb bei $\lg(-2)$ eine Fehlermeldung.

2) Berechne die Lösung der Gleichung $2^{n-1} = 4096$.

Zeige, dass diese Zahl auch eine Lösung der Gleichung $(-2)^{n-1} = 4096$ ist.

$$2^{n-1} = 4096 \iff (n-1) \cdot \lg(2) = \lg(4096) \iff n = \frac{\lg(4096)}{\lg(2)} + 1 = 13$$

$$\text{Probe: } (-2)^{13-1} = (-2)^{12} = 4096 \checkmark$$

Das **13.** Folgenglied von $(b_n)_{n \geq 1}$ hat den Wert -2048 .



Für jede Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

Wenn $(b_n)_{n \geq 1}$ eine **geometrische Folge** mit Quotient $q \neq 1$ ist, dann gilt die folgende Summenformel:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Wie berechnest du s_n , wenn $q = 1$ gilt?



Berechne das Ergebnis mithilfe der Summenformel.

$$\text{a) } 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 2 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$$

$$\text{b) } 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = 1 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2047$$

$$\text{c) } 4 + 40 + 400 + 4000 + \dots + 4000000 = 4 \cdot \frac{10^7 - 1}{10 - 1} = 4444444$$

Überrascht?

$$\text{d) } \sum_{k=3}^{12} (-2)^k = -8 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 2728$$



Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n) = (4; 12; 36; 108; \dots)$.

Die Summe der ersten n Folgenglieder beträgt 354 292. Berechne n .

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{3^n - 1}{2} = 2 \cdot (3^n - 1)$$

$$s_n = 354\,292 \iff 2 \cdot (3^n - 1) = 354\,292 \iff 3^n = 177\,147 \iff n = \frac{\lg(177\,147)}{\lg(3)} = 11$$



Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

$$(1 + q + q^2) \cdot (q - 1) = q + q^2 + q^3 - (1 + q + q^2) = q^3 - 1$$

$$(1 + q + q^2 + q^3) \cdot (q - 1) = q + q^2 + q^3 + q^4 - (1 + q + q^2 + q^3) = q^4 - 1$$

Wir haben es hier mit sogenannten **Teleskopsummen** zu tun. Erkennst du das Muster?

Allgemein gilt für $n \geq 1$:

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \cdot (q - 1) = \begin{array}{l} q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ -1 - q - q^2 - \dots - q^{n-1} \end{array} = q^n - 1$$

Wenn $q \neq 1$ ist, dann gilt also:

$$\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Damit können wir die Summenformel für geometrische Folgen beweisen:

$$\begin{aligned} s_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$



Die geometrische Folge (b_n) hat den Quotienten q .

Zeige, dass der **Betrag** jedes Folgenglieds das **geometrische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = |b_n|$$

Es gilt $b_{n+1} = b_n \cdot q$ und $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$. Daraus folgt:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q}} = \sqrt{b_n^2} = |b_n| \checkmark$$

