Geometrische Folge

Bei einer **geometrischen Folge** (b_n) kommt man von einem zum nächsten Folgenglied, indem man immer mit dem gleichen Faktor $q \neq 0$ multipliziert:

- $b_2 = b_1 \cdot q$ mit $b_1 \neq 0$
- $b_3 = b_2 \cdot q$
- $b_{n+1} = b_n \cdot q$ für alle $n \geq 1$

$$\left(b_1 \overset{\cdot q}{\curvearrowright} b_2 \overset{\cdot q}{\curvearrowright} b_3 \overset{\cdot q}{\curvearrowright} \ldots ; b_n \overset{\cdot q}{\curvearrowright} b_{n+1}; \ldots\right)$$

Zum Beispiel:
$(b_n) = (3; 6; 12; 24; 48; \ldots)$

Bei einer geometrischen Folge ist der **Quotient q** aufeinander folgender Glieder konstant:

$$\frac{b_2}{b_1} = q, \quad \frac{b_3}{b_2} = q, \quad \ldots \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \quad \text{für alle } n \geq 1$$

Geometrische Folge

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) Die geometrische Folge $(a_n) = (2; 6; 18; 54; 162; \ldots)$ hat den Quotienten $q = 3$.

b) Die geometrische Folge $(b_n) = \left(4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$ hat den Quotienten $q = \frac{1}{2}$.

c) Die geometrische Folge $(c_n) = \left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1; -2; 4; \ldots\right)$ hat den Quotienten $q = -2$.

d) Die geometrische Folge $(d_n) = (-3; -3; -3; -3; -3; \ldots)$ hat den Quotienten $q = 1$.

Bildungsgesetze geometrischer Folgen

Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1} = (2; 6; 18; 54; \ldots)$.

1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz für (b_n).

$$b_{n+1} = b_n \cdot 3 \quad \text{mit} \quad b_1 = 2$$

2) Berechne b_{15}.

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von b_1 zu b_{15}?

$$b_{15} = 2 \cdot 3^{14} = 9\,565\,938$$

3) Berechne b_{42}. Wie viele Stellen hat das Ergebnis?

$$b_{42} = 2 \cdot 3^{41} = 7{,}29\ldots \cdot 10^{19} \implies \text{20-stellige Zahl}$$

4) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (b_n).

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von b_1 zu b_n?

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Bildungsgesetze geometrischer Folgen

Allgemein hat jede geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit Quotient q die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$ und Angabe von $\boldsymbol{b_1}$
- **Explizites Bildungsgesetz:** $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

Geometrische Folge – Exponentialfunktion

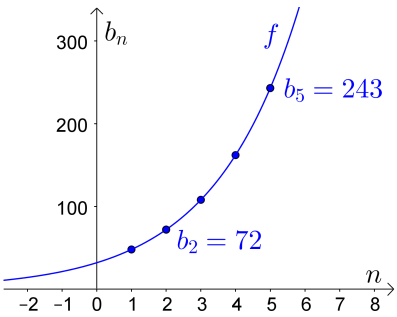
Die geometrische Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ enthält die Folgenglieder $b_2 = 72$ und $b_5 = 243$.

1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (b_n).

2) Rechts sind die beiden Folgenglieder b_2 und b_5 in einem Koordinatensystem dargestellt.
Der Graph der Exponentialfunktion f mit

$$f(x) = c \cdot a^x$$

enthält diese beiden Punkte. Ermittle die Parameter a und c.



3) Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 4 200 000 ?

1) $b_5 = b_2 \cdot q^3 \implies q = \sqrt[3]{\dfrac{b_5}{b_2}} = 1{,}5$

$b_2 = b_1 \cdot q \implies b_1 = \dfrac{b_2}{q} = 48$

Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot 1{,}5$ mit $b_1 = 48$

Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 48 \cdot 1{,}5^{n-1}$

2) $f(n) = b_n = 48 \cdot 1{,}5^{n-1} = 48 \cdot 1{,}5^n \cdot 1{,}5^{-1} = 32 \cdot 1{,}5^n$

$\implies a = 1{,}5$ und $c = 32$

3) $b_n > 4\,200\,000 \iff 1{,}5^{n-1} > 87\,500 \iff (n-1)\cdot \lg(1{,}5) > \lg(87\,500) \iff n > 29{,}06...$

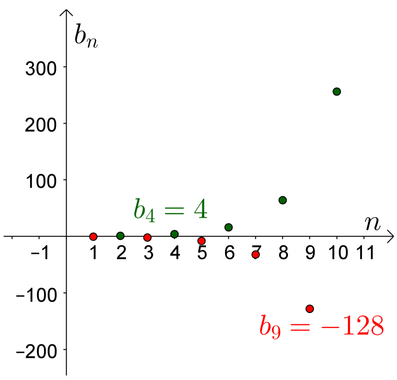
Ab dem 30. Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 4 200 000.

Alternierende Folge

Die geometrische Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ enthält die Folgenglieder $b_4 = 4$ und $b_9 = -128$.
Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (b_n).

$b_9 = b_4 \cdot q^5 \implies q = \sqrt[5]{\dfrac{b_9}{b_4}} = -2$

$b_4 = b_1 \cdot q^3 \implies b_1 = \dfrac{b_4}{q^3} = -0{,}5$



Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot (-2)$ mit $b_1 = -0{,}5$

Explizites Bildungsgesetz: $b_n = -0{,}5 \cdot (-2)^{n-1}$

Definitionsmenge MmF

Für die geometrische Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ gilt: $b_n = -0{,}5 \cdot (-2)^{n-1}$

Das wievielte Folgenglied hat den Wert -2048?

1) Felix rechnet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} b_n &= -2048 \\ -0{,}5 \cdot (-2)^{n-1} &= -2048 \\ (-2)^{n-1} &= 4096 \\ (n-1) \cdot \lg(-2) &= \lg(4096) \\ n &= \frac{\lg(4096)}{\lg(-2)} + 1 = ↯ \end{aligned}$$

Beim Versuch $\frac{\lg(4096)}{\lg(-2)} + 1$ zu berechnen, zeigt sein Taschenrechner zurecht eine Fehlermeldung an.

In welchem Rechenschritt ist Felix ein Fehler passiert?

Die Rechenregel $\lg(a^r) = r \cdot \lg(a)$ stimmt nur für $a > 0$.

Der Logarithmus $\lg(a)$ ist für $a < 0$ *nicht* definiert.

Der TR liefert deshalb bei $\lg(-2)$ eine Fehlermeldung.

2) Berechne die Lösung der Gleichung $2^{n-1} = 4096$.
Zeige, dass diese Zahl auch eine Lösung der Gleichung $(-2)^{n-1} = 4096$ ist.

$$2^{n-1} = 4096 \iff (n-1) \cdot \lg(2) = \lg(4096) \iff n = \frac{\lg(4096)}{\lg(2)} + 1 = 13$$

Probe: $(-2)^{13-1} = (-2)^{12} = 4096$ ✓

Das 13. Folgenglied von $(b_n)_{n\geq 1}$ hat den Wert -2048.

Geometrische Reihe MmF

Für jede Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

Wenn $(b_n)_{n\geq 1}$ eine **geometrische Folge** mit Quotient $q \neq 1$ ist, dann gilt die folgende Summenformel:

$$\boldsymbol{s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Wie berechnest du s_n, wenn $q = 1$ gilt?

Geometrische Reihe MmF

Berechne das Ergebnis mithilfe der Summenformel.

a) $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 2 \cdot \dfrac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$

b) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = 1 \cdot \dfrac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2047$

c) $4 + 40 + 400 + 4000 + \cdots + 4\,000\,000 = 4 \cdot \dfrac{10^7 - 1}{10 - 1} = 4\,444\,444$ Überrascht?

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{12} (-2)^k = -8 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 2728$

Geometrische Reihe – Umkehraufgabe

Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n) = (4; 12; 36; 108; \ldots)$.
Die Summe der ersten n Folgenglieder beträgt 354 292. Berechne n.

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{3^n - 1}{2} = 2 \cdot (3^n - 1)$$

$$s_n = 354\,292 \iff 2 \cdot (3^n - 1) = 354\,292 \iff 3^n = 177\,147 \iff n = \frac{\lg(177\,147)}{\lg(3)} = 11$$

Geometrische Reihe – Beweis

Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

$$(1 + q + q^2) \cdot (q - 1) = q + q^2 + q^3 - (1 + q + q^2) = q^3 - 1$$

$$(1 + q + q^2 + q^3) \cdot (q - 1) = q + q^2 + q^3 + q^4 - (1 + q + q^2 + q^3) = q^4 - 1$$

Wir haben es hier mit sogenannten Teleskopsummen zu tun. Erkennst du das Muster?

Allgemein gilt für $n \geq 1$:

$$\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) \cdot (q - 1) = \begin{array}{l} \qquad q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ -1 - q - q^2 - \cdots - q^{n-1} \qquad = q^n - 1 \end{array}$$

Wenn $q \neq 1$ ist, dann gilt also:

$$\underbrace{\boldsymbol{1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}}}_{\boldsymbol{n} \textbf{ Summanden}} = \boldsymbol{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Damit können wir die Summenformel für geometrische Folgen beweisen:

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \cdots + b_1 \cdot q^{n-1} =$$
$$= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Geometrische Folge – Geometrisches Mittel

Die geometrische Folge (b_n) hat den Quotienten q.
Zeige, dass der Betrag jedes Folgenglieds das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = |b_n|$$

Es gilt $b_{n+1} = b_n \cdot q$ und $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$. Daraus folgt:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q}} = \sqrt{b_n^2} = |b_n| \checkmark$$