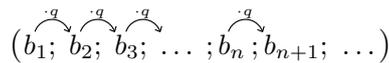


Bei einer **geometrischen Folge** (b_n) kommt man von einem zum nächsten Folgenglied, indem man immer mit dem gleichen Faktor $q \neq 0$ multipliziert:



- $b_2 = b_1 \cdot q$ mit $b_1 \neq 0$
- $b_3 = b_2 \cdot q$
- $b_{n+1} = b_n \cdot q$ für alle $n \geq 1$

Zum Beispiel:
 $(b_n) = (3; 6; 12; 24; 48; \dots)$

Bei einer geometrischen Folge ist der **Quotient** q aufeinander folgender Glieder konstant:

$$\frac{b_2}{b_1} = q, \quad \frac{b_3}{b_2} = q, \quad \dots \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \quad \text{für alle } n \geq 1$$

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

- a) Die geometrische Folge $(a_n) = (2; 6; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$ hat den Quotienten $q = \boxed{}$.
- b) Die geometrische Folge $(b_n) = (4; 2; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$ hat den Quotienten $q = \boxed{}$.
- c) Die geometrische Folge $(c_n) = (\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$ hat den Quotienten $q = \boxed{}$.
- d) Die geometrische Folge $(d_n) = (-3; \boxed{}; \boxed{}; -3; \boxed{}; \dots)$ hat den Quotienten $q = \boxed{}$.

Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1} = (2; 6; 18; 54; \dots)$.

- 1) Ermittle ein **rekursives Bildungsgesetz** für (b_n) .

- 2) Berechne b_{15} . Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von b_1 zu b_{15} ?

- 3) Berechne b_{42} . Wie viele Stellen hat das Ergebnis?

- 4) Ermittle ein **explizites Bildungsgesetz** für (b_n) . Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von b_1 zu b_n ?

Allgemein hat jede geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit Quotient q die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $b_{n+1} = b_n \cdot q$ und Angabe von b_1
- **Explizites Bildungsgesetz:** $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

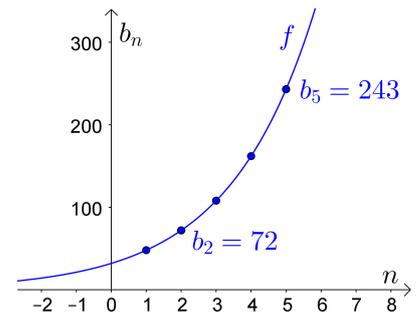


Die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $b_2 = 72$ und $b_5 = 243$.

- 1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (b_n) .
- 2) Rechts sind die beiden Folgenglieder b_2 und b_5 in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Graph der Exponentialfunktion f mit

$$f(x) = c \cdot a^x$$

enthält diese beiden Punkte. Ermittle die Parameter a und c .

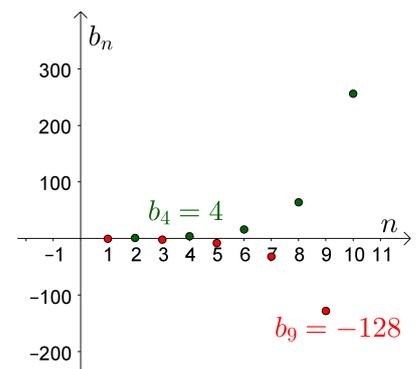


- 3) Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 4 200 000?



Die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $b_4 = 4$ und $b_9 = -128$.

Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (b_n) .





Für die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ gilt: $b_n = -0,5 \cdot (-2)^{n-1}$

Das wievielte Folgenglied hat den Wert -2048 ?

1) Felix rechnet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} b_n &= -2048 \\ -0,5 \cdot (-2)^{n-1} &= -2048 \\ (-2)^{n-1} &= 4096 \\ (n-1) \cdot \lg(-2) &= \lg(4096) \\ n &= \frac{\lg(4096)}{\lg(-2)} + 1 = 4 \end{aligned}$$

Beim Versuch $\frac{\lg(4096)}{\lg(-2)} + 1$ zu berechnen, zeigt sein Taschenrechner **zurecht** eine Fehlermeldung an.

In welchem Rechenschritt ist Felix ein Fehler passiert?

2) Berechne die Lösung der Gleichung $2^{n-1} = 4096$.

Zeige, dass diese Zahl auch eine Lösung der Gleichung $(-2)^{n-1} = 4096$ ist.

Das . Folgenglied von $(b_n)_{n \geq 1}$ hat den Wert -2048 .



Für jede Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

Wenn $(b_n)_{n \geq 1}$ eine **geometrische Folge** mit Quotient $q \neq 1$ ist, dann gilt die folgende Summenformel:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Wie berechnest du s_n , wenn $q = 1$ gilt?



Berechne das Ergebnis mithilfe der Summenformel.

a) $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = \frac{\text{---}}{\text{---}} \cdot \frac{\text{---} - 1}{\text{---} - 1} = \text{---}$

b) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \frac{\text{---}}{\text{---}} \cdot \frac{\text{---} - 1}{\text{---} - 1} = \text{---}$

c) $4 + 40 + 400 + 4000 + \dots + 4\,000\,000 = \frac{\text{---}}{\text{---}} \cdot \frac{\text{---} - 1}{\text{---} - 1} = \text{---}$

Überrascht?

d) $\sum_{k=3}^{12} (-2)^k = \frac{\text{---}}{\text{---}} \cdot \frac{\text{---} - 1}{\text{---} - 1} = \text{---}$

Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n) = (4; 12; 36; 108; \dots)$.

Die Summe der ersten n Folgenglieder beträgt 354 292. Berechne n .

Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

$$(1 + q + q^2) \cdot (q - 1) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(1 + q + q^2 + q^3) \cdot (q - 1) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Wir haben es hier mit sogenannten **Teleskopsummen** zu tun. Erkennst du das Muster?

Allgemein gilt für $n \geq 1$:

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \cdot (q - 1) = \begin{array}{l} q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ -1 - q - q^2 - \dots - q^{n-1} \end{array} = q^n - 1$$

Wenn $q \neq 1$ ist, dann gilt also:

$$\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Damit können wir die Summenformel für geometrische Folgen beweisen:

$$\begin{aligned} s_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Die geometrische Folge (b_n) hat den Quotienten q .

Zeige, dass der **Betrag** jedes Folgenglieds das **geometrische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = |b_n|$$

