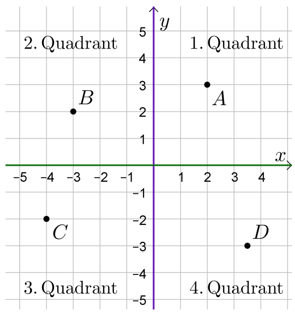
Kartesisches Koordinatensystem

Rechts siehst du, wie die **Zahlenebene** durch 2 Achsen in 4 Quadranten unterteilt wird.

Die **waagrechte Achse** heißt auch x-Achse, horizontale Achse, 1. Achse oder Abszisse.

Die **senkrechte Achse** heißt auch y-Achse, vertikale Achse, 2. Achse oder Ordinate.

Jeder Punkt in der Zahlenebene wird eindeutig durch Angabe seiner beiden **Koordinaten** festgelegt. Zum Beispiel:



$$A = (2 \mid 3) \quad B = (-3 \mid 2) \quad C = (-4 \mid -2) \quad D = (3{,}5 \mid -3)$$

Die Menge aller Zahlenpaare $(x \mid y)$ mit reellen Zahlen x und y wird mit $\mathbb{R}^2$ abgekürzt.

Lineare Gleichungen in 2 Variablen

In der Gleichung $y = 2 \cdot x + 1$ kommen *zwei* Variablen vor, nämlich x und y.

Die Gleichung $y = 2 \cdot x + 1$ ist eine Bedingung an die Zahlen x und y.

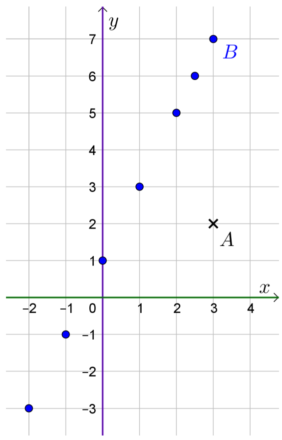
Wir suchen nach **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

$A = (3 \mid 2)$ ist *keine* Lösung der Gleichung, weil $2 \neq 2 \cdot 3 + 1$. ✗

$B = (3 \mid 7)$ ist eine **Lösung** der Gleichung, weil $7 = 2 \cdot 3 + 1$. ✓

In einer **Wertetabelle** tragen wir weitere Lösungen der Gleichung ein. Ergänze die Koordinaten so, dass die Zahlenpaare Lösungen sind.

x	-2	-1	0	1	2	$2{,}5$
y	-3	-1	1	3	5	6



Zeichne diese Lösungen als Punkte im Koordinatensystem rechts ein.

Tatsächlich hat jede **lineare Gleichung** $\boldsymbol{y = k \cdot x + d}$ *unendlich* viele Lösungen, und die Lösungen liegen auf einer Gerade.

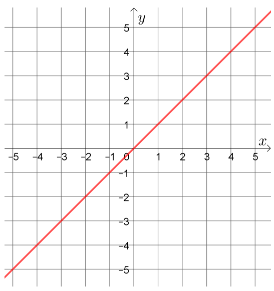
Die **Lösungsmenge** besteht aus *allen* Lösungen der Gleichung.

Versprachlichung

Beschreibe in Worten, welche Zahlenpaare $(x \mid y)$ Lösungen der gegebenen Gleichung sind. Stelle die Lösungsmenge in der Zahlenebene grafisch dar.

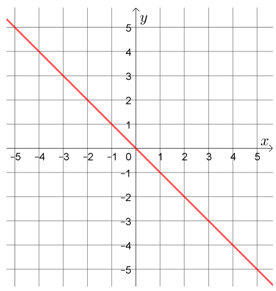
a) $y = x$

Lösungen sind alle Zahlenpaare, bei denen beide Koordinaten gleich groß sind.



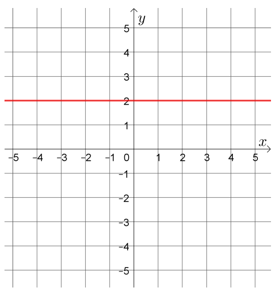
b) $y = -x$

Lösungen sind alle Zahlenpaare, bei denen sich die Koordinaten nur um das Vorzeichen unterscheiden.



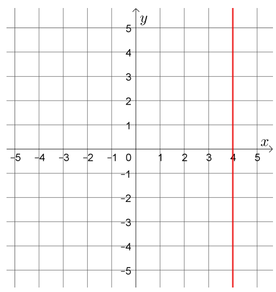
c) $y = 2$

Lösungen sind alle Zahlenpaare, bei denen die y-Koordinate 2 ist.



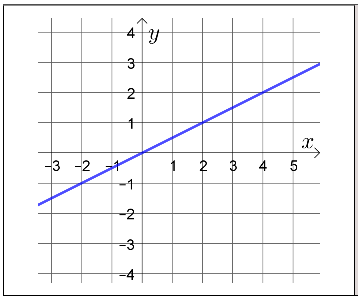
d) $x = 4$

Lösungen sind alle Zahlenpaare, bei denen die x-Koordinate 4 ist.

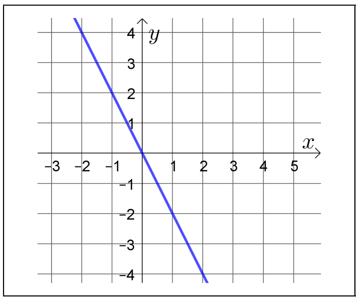


Steigung

Ordne den beiden dargestellten Geraden jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.



B



C

A	$y = 2 \cdot x$
B	$y = \frac{1}{2} \cdot x$
C	$y = -2 \cdot x$
D	$y = -\frac{1}{2} \cdot x$

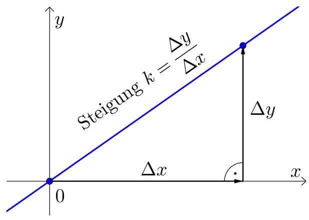
Einfluss des Parameters k

Die Lösungsmenge von $\boldsymbol{y = k \cdot x}$ ist genau jene Gerade, die …

1) durch den Punkt $(\mathbf{0} \mid \mathbf{0})$ verläuft und $\quad 0 = k \cdot 0$ ✓

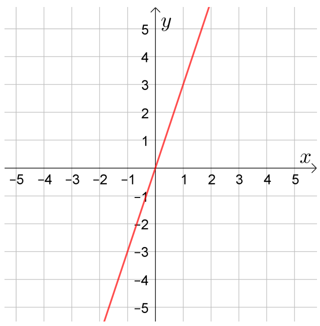
2) die **Steigung k** hat. Wenn x um 1 größer wird, dann muss y um k größer werden. ✓

In diesem Fall sind die Größen x und y zueinander direkt proportional.

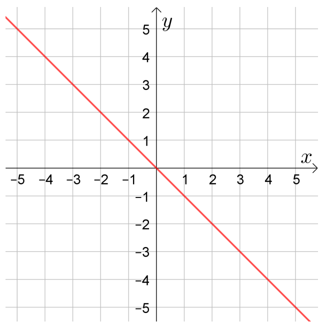


Gleichung → Ursprungsgerade

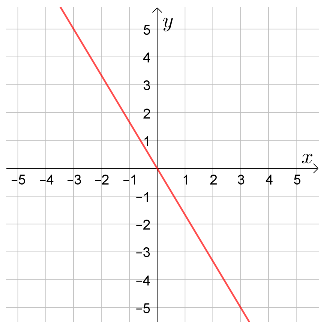
Zeichne jeweils die Gerade mit der gegebenen Gleichung in das Koordinatensystem ein.



$y = 3 \cdot x$



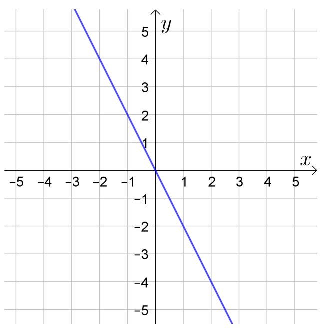
$y = -x$



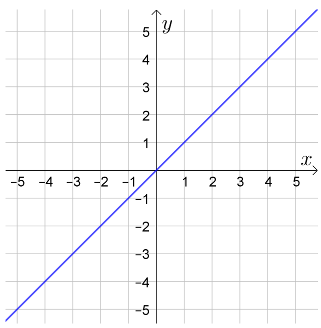
$y = -\dfrac{5}{3} \cdot x$

Ursprungsgerade → Gleichung

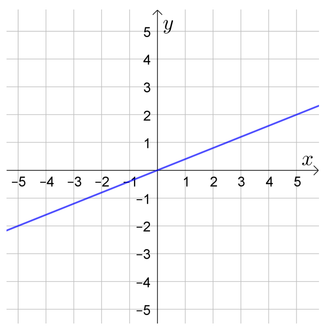
Stelle jeweils die Gleichung der dargestellten Gerade auf.



$y = -2 \cdot x$



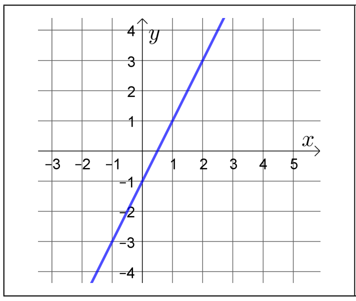
$y = x$



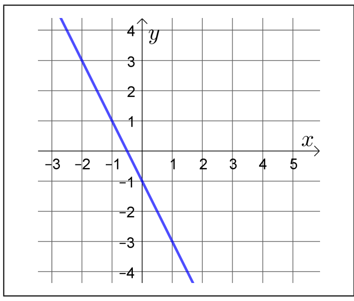
$y = \dfrac{2}{5} \cdot x$

Steigung & y-Achsenabschnitt

Ordne den beiden dargestellten Geraden jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.



B



D

A	$y = 2 \cdot x + 1$
B	$y = 2 \cdot x - 1$
C	$y = -2 \cdot x + 1$
D	$y = -2 \cdot x - 1$

Einfluss des Parameters d

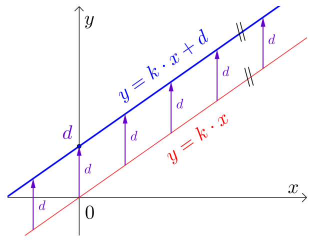
Die Lösungsmenge von $\boldsymbol{y = k \cdot x + d}$ ist genau jene Gerade, die …

1) durch den Punkt $\mathbf{(0 \mid \boldsymbol{d})}$ verläuft und $d = k \cdot 0 + d$ ✓

2) die **Steigung $\boldsymbol{k}$** hat. Wenn x um 1 größer wird, dann muss y um k größer werden. ✓

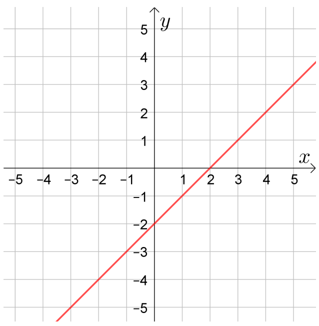
Die Zahl $\boldsymbol{d}$ heißt auch **$\boldsymbol{y}$-Achsenabschnitt** oder **Ordinatenabschnitt**.

Die beiden Parameter k und d legen gemeinsam jede Gerade in der Ebene, die *nicht* senkrecht ist, eindeutig fest.

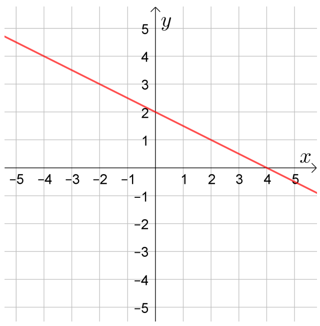


Gleichung → Gerade

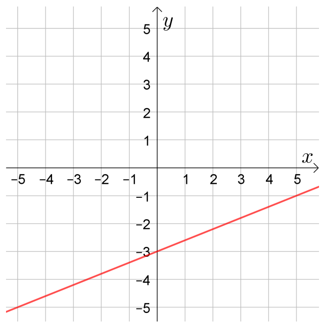
Zeichne jeweils die Gerade mit der gegebenen Gleichung in das Koordinatensystem ein.



$y = x - 2$



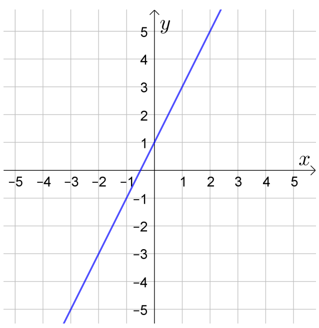
$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 2$



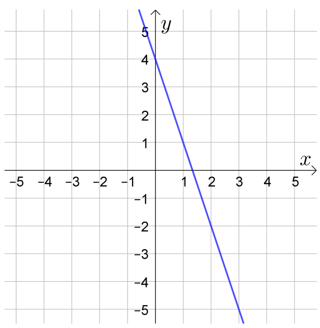
$y = \frac{2}{5} \cdot x - 3$

Gerade → Gleichung

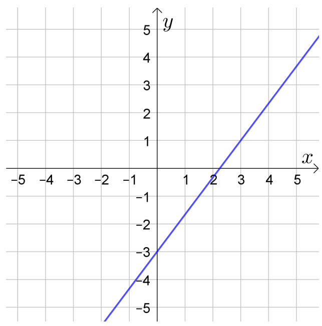
Stelle jeweils die Gleichung der dargestellten Gerade auf.



$y = 2 \cdot x + 1$



$y = -3 \cdot x + 4$



$y = \frac{4}{3} \cdot x - 3$

Punkt und Steigung

Eine Gerade verläuft durch den Punkt $(4 \mid 2)$ und hat die Steigung $-\frac{3}{2}$.
Ermittle ihre Gleichung $y = k \cdot x + d$.

$$d = y - k \cdot x = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 4 = 8$$

$$\implies y = -\frac{3}{2} \cdot x + 8$$

Zwei Punkte

Eine Gerade verläuft durch die Punkte $(-3 \mid 5)$ und $(4 \mid -1)$.
Ermittle ihre Gleichung $y = k \cdot x + d$.

Lösungsweg 1:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{-6}{7}$$

$$d = y - k \cdot x = 5 + \frac{6}{7} \cdot (-3) = \frac{35}{7} - \frac{18}{7} = \frac{17}{7}$$

$$\implies y = -\frac{6}{7} \cdot x + \frac{17}{7}$$

Lösungsweg 2:

$$\mathrm{I}: 5 = k \cdot (-3) + d$$
$$\mathrm{II}: -1 = k \cdot 4 + d$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{II}: 6 = -7 \cdot k \implies k = -\frac{6}{7}$$

$$\stackrel{\mathrm{II}}{\implies} -1 = -\frac{6}{7} \cdot 4 + d \implies d = \frac{17}{7}$$

$$\implies y = -\frac{6}{7} \cdot x + \frac{17}{7}$$

Lösungsweg 1: Zuerst die Steigung k der Gerade berechnen und dann den Punkt d in die Gleichung einsetzen.
Lösungsweg 2: Die beiden Punkte in die Gleichung einsetzen und dann das Gleichungssystem in den Variablen k und d lösen.
Am Ende des Arbeitsblatts findest du noch einen weiteren Lösungsweg.

Äquivalenzumformungen

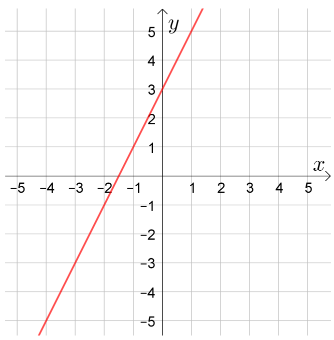
Erinnere dich, dass Äquivalenzumformungen die Lösungsmenge einer Gleichung *nicht* verändern.
Jede der folgenden Gleichungen hat also die gleiche Lösungsmenge:

1) $\frac{y-3}{2} = x \qquad | \cdot 2$

2) $y - 3 = 2 \cdot x \qquad | +3$

3) $y = 2 \cdot x + 3$

Stelle diese Lösungsmenge rechts grafisch dar.



Funktionsform

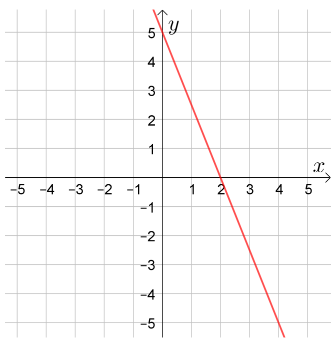
Zeige durch Umformen nach y, dass die Lösungen von $\frac{4-x}{2} = \frac{y+5}{5}$ auf einer Gerade liegen.
Stelle diese Lösungen rechts grafisch dar.

$$\iff 5 \cdot (4 - x) = 2 \cdot (y + 5)$$

$$\iff 20 - 5 \cdot x = 2 \cdot y + 10$$

$$\iff 10 - 5 \cdot x = 2 \cdot y$$

$$\iff y = -\frac{5}{2} \cdot x + 5$$



Allgemeine Form $a \cdot x + b \cdot y = c$

Die Geradengleichung $4 \cdot x - 3 \cdot y = 17$ ist in **allgemeiner Form**.

1) Forme die Gleichung in die Form $y = k \cdot x + d$ um.
Welche Steigung hat diese Gerade also?

$$4 \cdot x - 17 = 3 \cdot y \iff y = \frac{4 \cdot x - 17}{3} \iff y = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{17}{3}$$

Die Steigung der Gerade ist also $k = \frac{4}{3}$.

2) In welchen Punkten schneidet die Gerade die waagrechte Achse bzw. die senkrechte Achse?

$x = 0 \implies y = -\frac{17}{3}$ Die Gerade schneidet die senkrechte Achse in $\left(0 \mid -\frac{17}{3}\right)$.

$y = 0 \implies x = \frac{17}{4}$ Die Gerade schneidet die waagrechte Achse in $\left(\frac{17}{4} \mid 0\right)$.

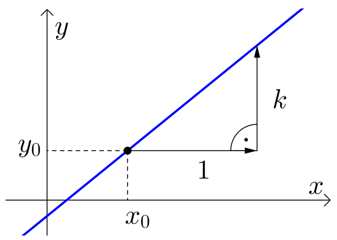
3) Gegeben sind die Punkte $A = (5 \mid 1)$, $B = (3 \mid -2)$ und $C = (-1 \mid -6)$.
Begründe für jeden Punkt, ob er oberhalb, unterhalb oder auf der Gerade liegt.

$x = 5 \implies y = \frac{4}{3} \cdot 5 - \frac{17}{3} = 1 \implies A = (5 \mid 1)$ liegt auf der Gerade.

$x = 3 \implies y = \frac{4}{3} \cdot 3 - \frac{17}{3} = -\frac{5}{3} > -2 \implies B = (3 \mid -2)$ liegt unterhalb der Gerade.

$x = -1 \implies y = \frac{4}{3} \cdot (-1) - \frac{17}{3} = -7 < -6 \implies C = (-1 \mid -6)$ liegt oberhalb der Gerade.

Punkt & Steigung



Die Gerade mit der Gleichung

$$\boldsymbol{y = k \cdot (x - x_0) + y_0}$$

hat die Steigung k und verläuft durch den Punkt $(x_0 \mid y_0)$.
Siehst du der Gleichung diese beiden Eigenschaften an?

Punkt & Steigung

Eine Gerade verläuft durch den Punkt $(4 \mid -2)$ und hat die Steigung $k = -3$.
Stelle eine Gleichung der Gerade auf.

Lösungsweg 1: $y = k \cdot x + d$

$y = -3 \cdot x + d$

$d = y + 3 \cdot x = -2 + 3 \cdot 4 = 10$

$\implies y = -3 \cdot x + 10$

Lösungsweg 2: $y = k \cdot (x - x_0) + y_0$

$y = -3 \cdot (x - 4) - 2$

$\implies y = -3 \cdot x + 10$