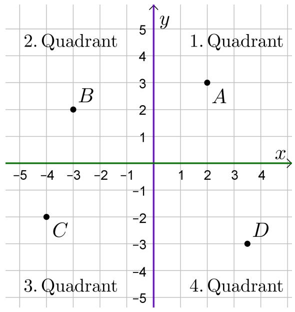
Kartesisches Koordinatensystem

Rechts siehst du, wie die **Zahlenebene** durch 2 Achsen in 4 Quadranten unterteilt wird.



Die **waagrechte Achse** heißt auch x-Achse,
horizontale Achse, 1. Achse oder Abszisse.

Die **senkrechte Achse** heißt auch y-Achse,
vertikale Achse, 2. Achse oder Ordinate.

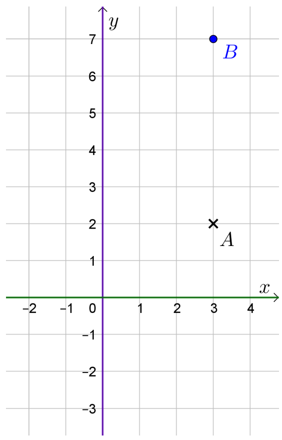
Jeder Punkt in der Zahlenebene wird eindeutig durch Angabe seiner beiden **Koordinaten** festgelegt. Zum Beispiel:

$$A = (2 \mid 3) \quad B = (-3 \mid 2) \quad C = (-4 \mid -2) \quad D = (3{,}5 \mid -3)$$

Die Menge aller Zahlenpaare $(x \mid y)$ mit reellen Zahlen x und y wird mit $\mathbb{R}^2$ abgekürzt.

Lineare Gleichungen in 2 Variablen

In der Gleichung $y = 2 \cdot x + 1$ kommen *zwei* Variablen vor, nämlich x und y.



Die Gleichung $y = 2 \cdot x + 1$ ist eine Bedingung an die Zahlen x und y.

Wir suchen nach **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

$A = (3 \mid 2)$ ist *keine* Lösung der Gleichung, weil $2 \neq 2 \cdot 3 + 1$. ✗

$B = (3 \mid 7)$ ist eine **Lösung** der Gleichung, weil $7 = 2 \cdot 3 + 1$. ✓

In einer **Wertetabelle** tragen wir weitere Lösungen der Gleichung ein.
Ergänze die Koordinaten so, dass die Zahlenpaare Lösungen sind.

x	-2	-1	0	1	2	
y						6

Zeichne diese Lösungen als Punkte im Koordinatensystem rechts ein.

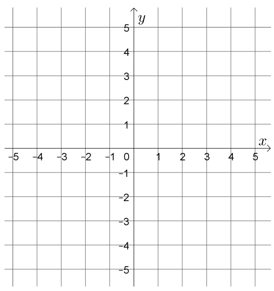
Tatsächlich hat jede **lineare Gleichung** $\boldsymbol{y = k \cdot x + d}$ *unendlich* viele Lösungen, und die Lösungen liegen auf einer Gerade.

Die **Lösungsmenge** besteht aus *allen* Lösungen der Gleichung.

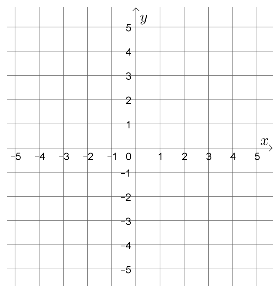
Versprachlichung

Beschreibe in Worten, welche Zahlenpaare $(x \mid y)$ Lösungen der gegebenen Gleichung sind.
Stelle die Lösungsmenge in der Zahlenebene grafisch dar.

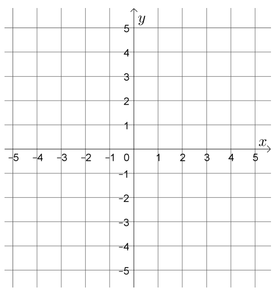
a) $y = x$



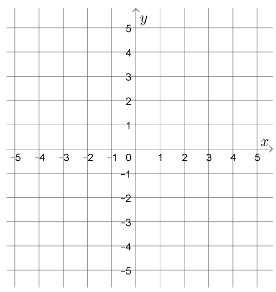
b) $y = -x$



c) $y = 2$

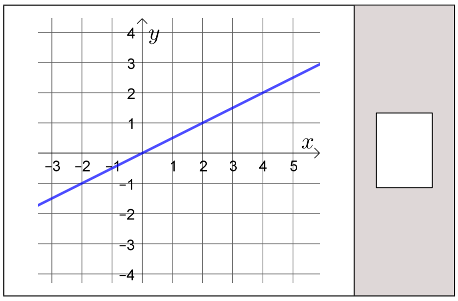


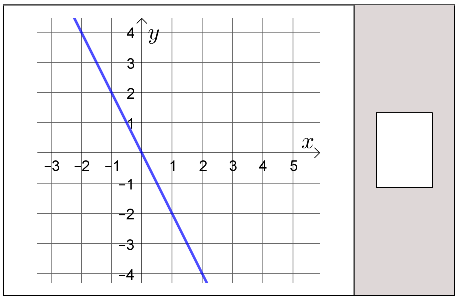
d) $x = 4$



Steigung

Ordne den beiden dargestellten Geraden jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.





A	$y = 2 \cdot x$
B	$y = \frac{1}{2} \cdot x$
C	$y = -2 \cdot x$
D	$y = -\frac{1}{2} \cdot x$

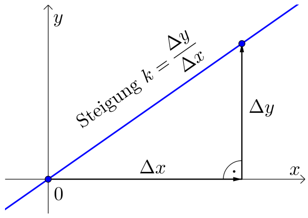
Einfluss des Parameters k

Die Lösungsmenge von $\boldsymbol{y = k \cdot x}$ ist genau jene Gerade, die …

1) durch den Punkt $\mathbf{(0 \mid 0)}$ verläuft und $\quad 0 = k \cdot 0$ ✓

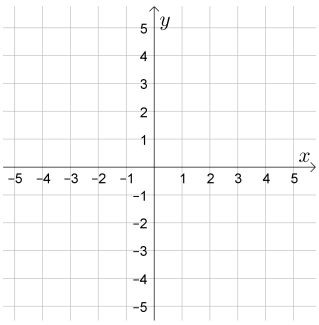
2) die **Steigung k** hat. Wenn x um 1 größer wird, dann muss y um k größer werden. ✓

In diesem Fall sind die Größen x und y zueinander direkt proportional.

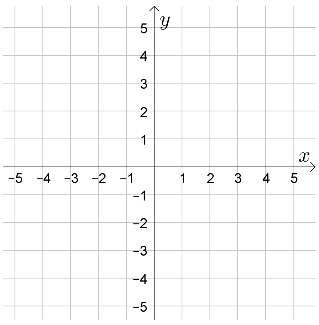


Gleichung → Ursprungsgerade

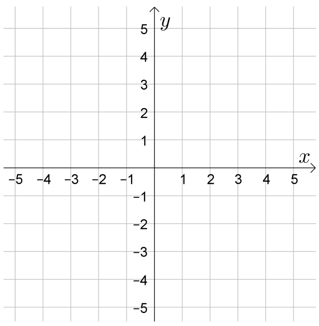
Zeichne jeweils die Gerade mit der gegebenen Gleichung in das Koordinatensystem ein.



$y = 3 \cdot x$



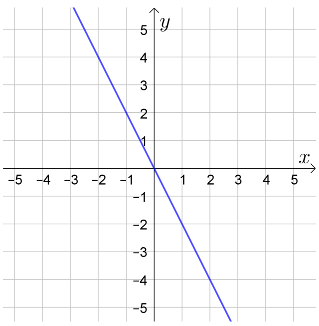
$y = -x$



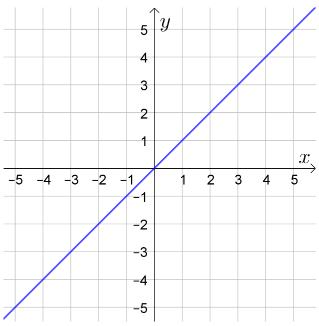
$y = -\dfrac{5}{3} \cdot x$

Ursprungsgerade → Gleichung

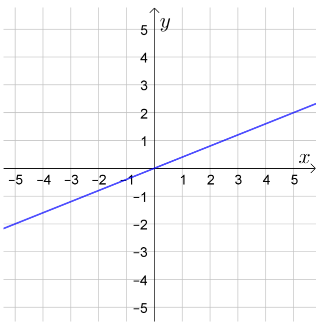
Stelle jeweils die Gleichung der dargestellten Gerade auf.



$y = \boxed{}$



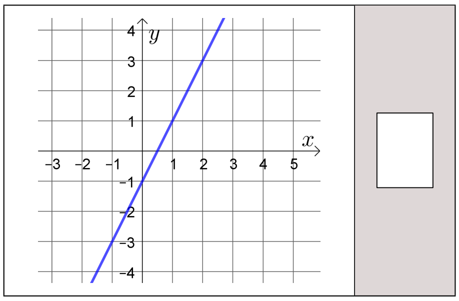
$y = \boxed{}$

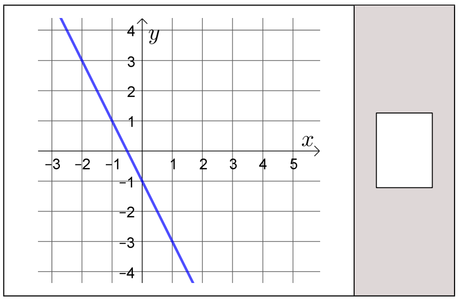


$y = \boxed{}$

Steigung & y-Achsenabschnitt

Ordne den beiden dargestellten Geraden jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.





A	$y = 2 \cdot x + 1$
B	$y = 2 \cdot x - 1$
C	$y = -2 \cdot x + 1$
D	$y = -2 \cdot x - 1$

Einfluss des Parameters d

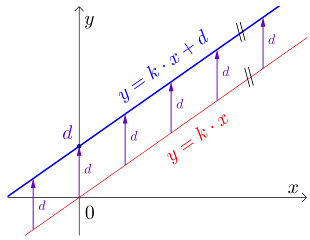
Die Lösungsmenge von $\boldsymbol{y = k \cdot x + d}$ ist genau jene Gerade, die ...

1) durch den Punkt $(\mathbf{0} \mid \boldsymbol{d})$ verläuft und $d = k \cdot 0 + d$ ✓

2) die **Steigung $\boldsymbol{k}$** hat. Wenn x um 1 größer wird, dann muss y um k größer werden. ✓

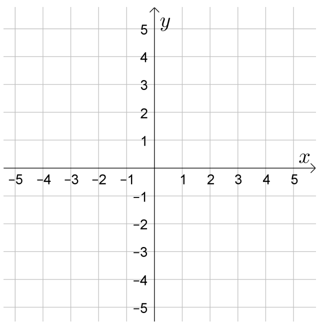
Die Zahl $\boldsymbol{d}$ heißt auch ***y*-Achsenabschnitt** oder **Ordinatenabschnitt**.

Die beiden Parameter k und d legen gemeinsam jede Gerade in der Ebene, die *nicht* senkrecht ist, eindeutig fest.

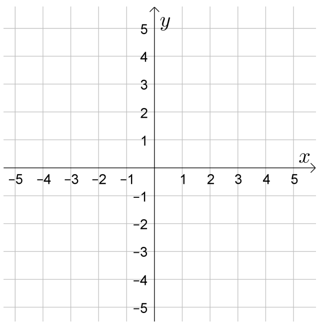


Gleichung → Gerade

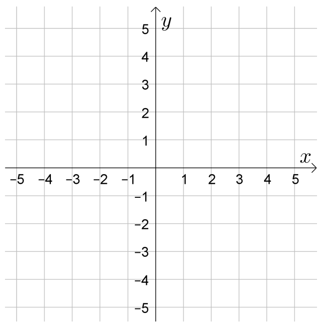
Zeichne jeweils die Gerade mit der gegebenen Gleichung in das Koordinatensystem ein.



$y = x - 2$



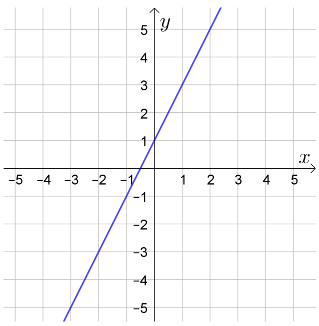
$y = -\dfrac{1}{2} \cdot x + 2$



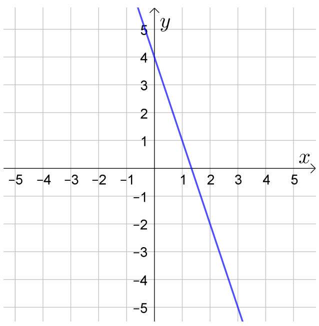
$y = \dfrac{2}{5} \cdot x - 3$

Gerade → Gleichung

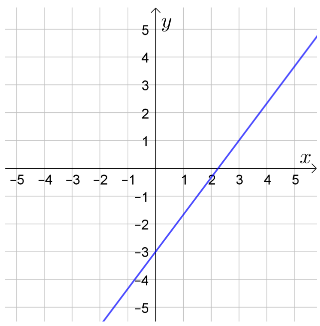
Stelle jeweils die Gleichung der dargestellten Gerade auf.



$y =$ ☐



$y =$ ☐



$y =$ ☐

Punkt und Steigung

Eine Gerade verläuft durch den Punkt $(4 \mid 2)$ und hat die Steigung $-\frac{3}{2}$.
Ermittle ihre Gleichung $y = k \cdot x + d$.

Zwei Punkte

Eine Gerade verläuft durch die Punkte $(-3 \mid 5)$ und $(4 \mid -1)$.
Ermittle ihre Gleichung $y = k \cdot x + d$.

Lösungsweg 1: Zuerst die Steigung k der Gerade berechnen und dann den Punkt d in die Gleichung einsetzen.

Lösungsweg 2: Die beiden Punkte in die Gleichung einsetzen und dann das Gleichungssystem in den Variablen k und d lösen.

Am Ende des Arbeitsblatts findest du noch einen weiteren Lösungsweg.

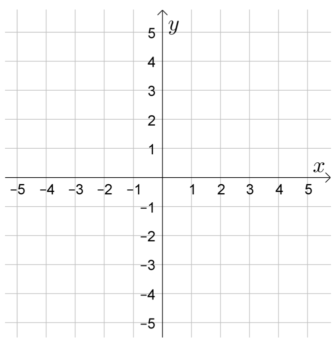
Äquivalenzumformungen

Erinnere dich, dass Äquivalenzumformungen die Lösungsmenge einer Gleichung *nicht* verändern.
Jede der folgenden Gleichungen hat also die gleiche Lösungsmenge:

1) $\dfrac{y-3}{2} = x \qquad \mid \cdot 2$

2) $y - 3 = 2 \cdot x \qquad \mid +3$

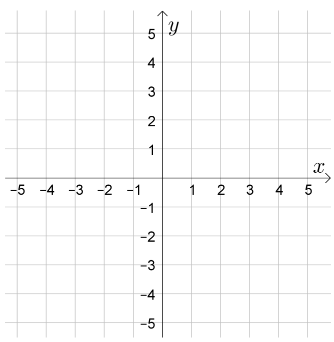
3) $y = 2 \cdot x + 3$



Stelle diese Lösungsmenge rechts grafisch dar.

Funktionsform

Zeige durch Umformen nach y, dass die Lösungen von $\dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y+5}{5}$ auf einer Gerade liegen.
Stelle diese Lösungen rechts grafisch dar.



Allgemeine Form

$a \cdot x + b \cdot y = c$

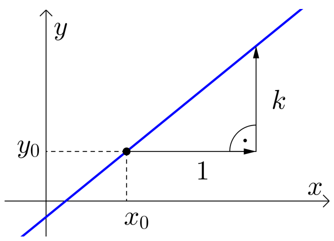
Die Geradengleichung $4 \cdot x - 3 \cdot y = 17$ ist in **allgemeiner Form**.

1) Forme die Gleichung in die Form $y = k \cdot x + d$ um.
Welche Steigung hat diese Gerade also?

2) In welchen Punkten schneidet die Gerade die waagrechte Achse bzw. die senkrechte Achse?

3) Gegeben sind die Punkte $A = (5 \mid 1)$, $B = (3 \mid -2)$ und $C = (-1 \mid -6)$.
Begründe für jeden Punkt, ob er oberhalb, unterhalb oder auf der Gerade liegt.

Punkt & Steigung



Die Gerade mit der Gleichung

$$\boldsymbol{y = k \cdot (x - x_0) + y_0}$$

hat die Steigung k und verläuft durch den Punkt $(x_0 \mid y_0)$.
Siehst du der Gleichung diese beiden Eigenschaften an?

Punkt & Steigung

Eine Gerade verläuft durch den Punkt $(4 \mid -2)$ und hat die Steigung $k = -3$.
Stelle eine Gleichung der Gerade auf.

Lösungsweg 1: $y = k \cdot x + d$

Lösungsweg 2: $y = k \cdot (x - x_0) + y_0$