Wozu Gleichungen?

Die Hälfte der gesuchten Zahl ist um 42 kleiner als das Doppelte dieser Zahl. Welche Zahl ist das?
Durch geschicktes Herumprobieren können wir diese Zahl schließlich finden.
Mit Gleichungen können wir solche Aufgaben *systematisch* lösen.

Für die gesuchte Zahl x gilt:
$$\underbrace{\overbrace{\frac{x}{2}}^{\text{um 42 kleiner als } 2\cdot x} + 42}_{\text{gleich groß wie } 2\cdot x} = 2\cdot x$$

Eine Zahl heißt genau dann **Lösung** der Gleichung, wenn man beim Einsetzen dieser Zahl für x auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis erhält.

1) Zeige, dass die Zahl 20 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.
Linke Seite: $\frac{20}{2} + 42 = 52$ Rechte Seite: $2 \cdot 20 = 40$
$52 \neq 40 \implies$ 20 ist *keine* Lösung dieser Gleichung.

2) Zeige, dass die Zahl 28 eine Lösung dieser Gleichung ist.
Linke Seite: $\frac{28}{2} + 42 = 56$ Rechte Seite: $2 \cdot 28 = 56$
$56 = 56 \implies$ 28 ist eine Lösung dieser Gleichung.

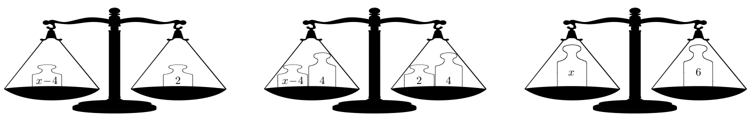
Mit Äquivalenzumformungen finden wir diese Lösung *systematisch*.

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen verändern die Lösungen einer Gleichung *nicht*.

- Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x - 4 &= 2 \qquad \mid +4 \\ x - 4 + 4 &= 2 + 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



Die Waage bleibt bei jeder Äquivalenzumformung im Gleichgewicht.

Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich 6.

- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x + 4 &= 2 \qquad \mid -4 \\ x + 4 - 4 &= 2 - 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich -2.

- Multiplikation mit dem gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 2 \qquad \mid \cdot 4 \\ \frac{x}{4} \cdot 4 &= 2 \cdot 4 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich 8.

- Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x &= 2 \qquad \mid : 4 \\ \frac{4 \cdot x}{4} &= \frac{2}{4} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich 0,5.

Äquivalenzumformungen

Wir vereinfachen Gleichungen mit Äquivalenzumformungen, um ihre Lösungen *systematisch* zu finden. Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2} + 42 &= 2 \cdot x && \mid \cdot 2 \\
\left(\frac{x}{2} + 42\right) \cdot 2 &= (2 \cdot x) \cdot 2 \\
x + 84 &= 4 \cdot x && \mid -x \\
x + 84 - x &= 4 \cdot x - x \\
84 &= 3 \cdot x && \mid : 3 \\
28 &= x
\end{aligned}
$$

Du kannst in Zukunft auch Schritte überspringen. Beachte bei Äquivalenzumformungen aber stets, dass du

1) die *gleiche* Rechenoperation

2) auf die *ganze* linke Seite in Klammer

3) und die *ganze* rechte Seite in Klammer

anwendest. *Falsch* wäre zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2} + 42 &= 2 \cdot x \quad \mid \cdot 2 \\
x + 42 &= 4 \cdot x
\end{aligned}
$$

Jede dieser Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich 28.

Insbesondere hat die ursprüngliche Gleichung $\frac{x}{2} + 42 = 2 \cdot x$ eben diese Lösung.

Annahmen

Bei den folgenden Gleichungen bzw. Formeln nehmen alle auftretenden Variablen, Größen und Parameter jeweils nur solche Werte an, dass alle Ausdrücke definiert sind und die Gleichungen bzw. Formeln eindeutig nach der gesuchten Variable bzw. Größe umgeformt werden können.

Zum Beispiel tritt bei Divisionen keine Division durch 0 auf.

Schrittweise umformen

Wenn in einer Gleichung bzw. Formel die gesuchte Variable x bzw. Größe an nur *einer* Stelle vorkommt, dann können wir sie mit Äquivalenzumformungen schrittweise isolieren.

Dazu kehren wir in jedem Schritt die jeweils äußerste Rechenoperation auf der Seite mit x um:

$$
\begin{aligned}
\frac{42}{4 \cdot x - 6} &= 3 && \mid \cdot (4 \cdot x - 6) \\
42 &= 3 \cdot (4 \cdot x - 6) && \mid : 3 \\
14 &= 4 \cdot x - 6 && \mid +6 \\
20 &= 4 \cdot x && \mid : 4 \\
5 &= x
\end{aligned}
$$

$t_2 = ?$

$$
\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} && \mid \cdot (t_2 - t_1) \\
\bar{v} \cdot (t_2 - t_1) &= s_2 - s_1 && \mid : \bar{v} \\
t_2 - t_1 &= \frac{s_2 - s_1}{\bar{v}} && \mid + t_1 \\
t_2 &= \frac{s_2 - s_1}{\bar{v}} + t_1
\end{aligned}
$$

Schrittweise umformen

Forme nach x um.

$$
\begin{aligned}
\frac{(4 \cdot x - 2) \cdot 3}{5} &= 18 && \mid \cdot 5 \\
(4 \cdot x - 2) \cdot 3 &= 90 && \mid : 3 \\
4 \cdot x - 2 &= 30 && \mid +2 \\
4 \cdot x &= 32 && \mid : 4 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Forme nach g um. Wurfweite (Waagrechter Wurf)

$$
\begin{aligned}
w &= v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} && \mid : v_0 \\
\frac{w}{v_0} &= \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} && \mid (.)^2 \\
\left(\frac{w}{v_0}\right)^2 &= \frac{2 \cdot h_0}{g} && \mid \cdot g \\
\frac{w^2}{v_0^2} \cdot g &= 2 \cdot h_0 && \mid : \frac{w^2}{v_0^2} \quad \text{bzw.} \quad \mid \cdot \frac{v_0^2}{w^2} \\
g &= \frac{2 \cdot h_0 \cdot v_0^2}{w^2}
\end{aligned}
$$

$R_2 = ?$

Es gibt aber auch Formeln, bei denen dieselbe Größe an *mehreren* Stellen vorkommt. Zum Beispiel:

$$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \qquad R_2 = ?$$

Auch diese Formel kannst du systematisch nach R_2 umformen. Mehr dazu findest du am restlichen Arbeitsblatt.

Level 1 (Gleichung)

Level 1: Forme nach x um. Hebe dazu x heraus und dividiere.

a) $2 \cdot x + 4 \cdot x = 18$ **b)** $3 \cdot x - 8 \cdot x = 25$ **c)** $a \cdot x + b \cdot x = c$

a) $2 \cdot x + 4 \cdot x = 18 \iff 6 \cdot x = 18 \iff x = 3$

b) $3 \cdot x - 8 \cdot x = 25 \iff -5 \cdot x = 25 \iff x = -5$

c) $a \cdot x + b \cdot x = c \iff (a + b) \cdot x = c \iff x = \frac{c}{a+b}$

Level 1 (Formel)

Forme die Formel nach ℓ_0 um. Längenausdehnung bei Erwärmung

$$\ell_T = \ell_0 + \ell_0 \cdot \alpha \cdot T$$
$$\ell_T = \ell_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T) \quad | : (1 + \alpha \cdot T)$$
$$\ell_0 = \frac{\ell_T}{1 + \alpha \cdot T}$$

Level 2 (Gleichung)

Level 2: Forme nach x um. Bringe dazu nur mithilfe von Additionen und Subtraktionen alle Terme mit x auf die eine Seite und alle Terme ohne x auf die andere Seite. Dann bist du wieder in Level 1.

a) $-5 \cdot x = 9 - 2 \cdot x$ **b)** $6 \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 4$ **c)** $a \cdot x + b = c \cdot x + d$

a) $-5 \cdot x = 9 - 2 \cdot x \iff -3 \cdot x = 9 \iff x = -3$

b) $6 \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 4 \iff 3 \cdot x = -6 \iff x = -2$

c) $a \cdot x + b = c \cdot x + d \iff a \cdot x - c \cdot x = d - b \iff x \cdot (a - c) = d - b \iff x = \frac{d-b}{a-c}$

Level 2 (Formel)

Forme die Formel nach m_1 um.

Impulserhaltungssatz

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \quad && | - m_1 \cdot v_1' \ | - m_2 \cdot v_2 \\
m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1' &= m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2 \\
m_1 \cdot (v_1 - v_1') &= m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2 \quad && | : (v_1 - v_1') \\
m_1 &= \frac{m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2}{v_1 - v_1'}
\end{aligned}
$$

Level 3 (Gleichung)

Level 3: Forme nach x um. Multipliziere dazu alle Klammern aus. Dann bist du wieder in Level 2.

a) $4 \cdot (x-2) = -2 \cdot (x+1)$ **b)** $2 \cdot (5 - 3 \cdot x) - 4 \cdot (x+2) = 12$ **c)** $a \cdot (x+b) = x \cdot (c+d)$

a) $4 \cdot (x-2) = -2 \cdot (x+1) \iff 4 \cdot x - 8 = -2 \cdot x - 2 \iff 6 \cdot x = 6 \iff x = 1$

b) $2 \cdot (5 - 3 \cdot x) - 4 \cdot (x+2) = 12 \iff 10 - 6 \cdot x - 4 \cdot x - 8 = 12 \iff -10 = 10 \cdot x \iff x = -1$

c) $a \cdot (x+b) = x \cdot (c+d) \iff$

$\iff a \cdot x + a \cdot b = c \cdot x + d \cdot x \iff$

$\iff a \cdot b = c \cdot x + d \cdot x - a \cdot x \iff$

$\iff a \cdot b = x \cdot (c + d - a) \iff x = \dfrac{a \cdot b}{c + d - a}$

Level 3 (Formel)

Forme die Formel nach a um.

Oberflächeninhalt eines Quaders

$$
\begin{aligned}
O &= 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \\
O &= 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \quad && | - 2 \cdot b \cdot c \\
O - 2 \cdot b \cdot c &= 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c \\
O - 2 \cdot b \cdot c &= a \cdot (2 \cdot b + 2 \cdot c) \quad && | : (2 \cdot b + 2 \cdot c) \\
a &= \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot b + 2 \cdot c}
\end{aligned}
$$

Level 4 (Gleichung)

Level 4: Forme nach x um. Multipliziere dazu beide Seiten mit einem Term, der alle Nenner eliminiert. Dann bist du wieder in Level 3.

a) $\frac{42}{x} = 7$ **b)** $\frac{2}{x+3} = \frac{4}{x+6}$ **c)** $\frac{x+1}{3} = 2 - \frac{x-5}{2}$ **d)** $\frac{4}{a} = \frac{2}{b} + \frac{3}{x}$

a) $\frac{42}{x} = 7 \iff 42 = 7 \cdot x \iff x = 6$

b) $\frac{2}{x+3} = \frac{4}{x+6} \iff 2 \cdot (x+6) = 4 \cdot (x+3) \iff 2 \cdot x + 12 = 4 \cdot x + 12 \iff 0 = 2 \cdot x \iff$

$\iff x = 0$

c) $\frac{x+1}{3} = 2 - \frac{x-5}{2} \iff 2 \cdot (x+1) = 12 - 3 \cdot (x-5) \iff 2 \cdot x + 2 = 12 - 3 \cdot x + 15 \iff$

$\iff 5 \cdot x = 25 \iff x = 5$

d) $\frac{4}{a} = \frac{2}{b} + \frac{3}{x} \iff 4 \cdot b \cdot x = 2 \cdot a \cdot x + 3 \cdot a \cdot b \iff$

$\iff 4 \cdot b \cdot x - 2 \cdot a \cdot x = 3 \cdot a \cdot b \iff$

$\iff x \cdot (4 \cdot b - 2 \cdot a) = 3 \cdot a \cdot b \iff x = \frac{3 \cdot a \cdot b}{4 \cdot b - 2 \cdot a}$

Level 4 (Formel)

Forme die Formel nach R_2 um.

Elektrischer Widerstand

$$\begin{aligned}
R &= R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} && \mid \cdot (R_2 + R_3) \\
R \cdot (R_2 + R_3) &= R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3 \\
R \cdot R_2 + R \cdot R_3 &= R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 && \mid - R \cdot R_2 \mid - R_1 \cdot R_3 \\
R \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3 &= R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 - R \cdot R_2 \\
R \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3 &= R_2 \cdot (R_1 + R_3 - R) && \mid : (R_1 + R_3 - R) \\
R_2 &= \frac{R \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3 - R}
\end{aligned}$$

Level 5 (Gleichung)

Level 5: Forme nach x um. Multipliziere dazu alle Klammern aus. Dann bist du wieder in Level 4.

$$a \cdot \frac{x-2}{b} = c \cdot \left(\frac{x}{d} + 1\right)$$

$$a \cdot \frac{x-2}{b} = c \cdot \left(\frac{x}{d} + 1\right) \iff$$

$$\iff \frac{a \cdot x - 2 \cdot a}{b} = \frac{c \cdot x}{d} + c \iff$$

$$\iff d \cdot (a \cdot x - 2 \cdot a) = b \cdot (c \cdot x) + b \cdot c \cdot d \iff$$

$$\iff a \cdot d \cdot x - 2 \cdot a \cdot d = b \cdot c \cdot x + b \cdot c \cdot d \iff$$

$$\iff a \cdot d \cdot x - b \cdot c \cdot x = 2 \cdot a \cdot d + b \cdot c \cdot d \iff$$

$$\iff x \cdot (a \cdot d - b \cdot c) = 2 \cdot a \cdot d + b \cdot c \cdot d \iff x = \frac{2 \cdot a \cdot d + b \cdot c \cdot d}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Level 5 (Formel)

Forme die Formel nach m_2 um.

Zentraler elastischer Stoß

$$\begin{aligned}
v_1' &= \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \\
v_1' &= \frac{2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2} && | \cdot (m_1 + m_2) \\
v_1' \cdot (m_1 + m_2) &= 2 \cdot m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 \\
v_1' \cdot m_1 + v_1' \cdot m_2 &= 2 \cdot m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 && | - v_1' \cdot m_2 \ | - m_1 \cdot v_1 \\
v_1' \cdot m_1 - m_1 \cdot v_1 &= 2 \cdot m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1 - v_1' \cdot m_2 \\
v_1' \cdot m_1 - m_1 \cdot v_1 &= m_2 \cdot (2 \cdot v_2 - v_1 - v_1') && | : (2 \cdot v_2 - v_1 - v_1') \\
m_2 &= \frac{v_1' \cdot m_1 - m_1 \cdot v_1}{2 \cdot v_2 - v_1 - v_1'}
\end{aligned}$$