Wozu Gleichungen?

Die Hälfte der gesuchten Zahl ist um 42 kleiner als das Doppelte dieser Zahl. Welche Zahl ist das?
Durch geschicktes Herumprobieren können wir diese Zahl schließlich finden.
Mit Gleichungen können wir solche Aufgaben *systematisch* lösen.

Zum Beispiel auch die gleiche Aufgabe nur mit 4,02 statt 42.

Für die gesuchte Zahl x gilt:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{x}{2}}^{\text{um 42 kleiner als } 2\cdot x} + 42}_{\text{gleich groß wie } 2\cdot x} = 2 \cdot x$$

Eine Zahl heißt genau dann **Lösung** der Gleichung, wenn man beim Einsetzen dieser Zahl für x auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis erhält.

1) Zeige, dass die Zahl 20 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.

2) Zeige, dass die Zahl 28 eine Lösung dieser Gleichung ist.

Mit Äquivalenzumformungen finden wir diese Lösung 28 *systematisch*.

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen verändern die Lösungen einer Gleichung *nicht*.

- Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x - 4 &= 2 \qquad \mid +4 \\ x - 4 + 4 &= 2 + 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

  Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich $\boxed{}$.

- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x + 4 &= 2 \qquad \mid -4 \\ x + 4 - 4 &= 2 - 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

  Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich $\boxed{}$.

- Multiplikation mit dem gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 2 \qquad \mid \cdot 4 \\ \frac{x}{4} \cdot 4 &= 2 \cdot 4 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

  Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich $\boxed{}$.

- Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x &= 2 \qquad \mid : 4 \\ \frac{4 \cdot x}{4} &= \frac{2}{4} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Jede dieser drei Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich $\boxed{}$.

Äquivalenzumformungen

Wir vereinfachen Gleichungen mit Äquivalenzumformungen, um ihre Lösungen *systematisch* zu finden. Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} + 42 &= 2 \cdot x && \mid \cdot 2 \\
\left(\frac{x}{2} + 42\right) \cdot 2 &= (2 \cdot x) \cdot 2 && \\
x + \boxed{} &= \boxed{} \cdot x && \mid -x \\
x + \boxed{} - x &= \boxed{} \cdot x - x && \\
\boxed{} &= \boxed{} \cdot x && \mid : \boxed{} \\
\boxed{} &= x &&
\end{aligned}$$

Du kannst in Zukunft auch Schritte überspringen. Beachte bei Äquivalenzumformungen aber stets, dass du

1) die *gleiche* Rechenoperation

2) auf die *ganze* linke Seite in Klammer

3) und die *ganze* rechte Seite in Klammer

anwendest. *Falsch* wäre zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} + 42 &= 2 \cdot x \quad \mid \cdot 2 \\
x + 42 &= 4 \cdot x
\end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen hat dieselbe Lösung, nämlich $\boxed{}$.

Insbesondere hat die ursprüngliche Gleichung $\frac{x}{2} + 42 = 2 \cdot x$ eben diese Lösung.

Annahmen

Bei den folgenden Gleichungen bzw. Formeln nehmen die Parameter a, b, c und d sowie die Variable x jeweils nur solche Werte an, dass alle Ausdrücke definiert sind und die Gleichungen bzw. Formeln eindeutig nach x umgeformt werden können. Zum Beispiel tritt bei Divisionen keine Division durch 0 auf.

Level 1

Forme nach x um.

Hebe x heraus und dividiere.

a) $2 \cdot x + 4 \cdot x = 18$ **b)** $3 \cdot x - 8 \cdot x = 25$ **c)** $a \cdot x + b \cdot x = c$

Level 2

Forme nach x um.

Bringe nur mithilfe von $+$ und $-$ alle Terme mit x auf die eine Seite und alle Terme ohne x auf die andere Seite. $\rightsquigarrow$ Level 1

a) $-5 \cdot x = 9 - 2 \cdot x$ **b)** $6 \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 4$ **c)** $a \cdot x + b = c \cdot x + d$

Level 3

Forme nach x um.

Multipliziere alle Klammern aus. $\rightsquigarrow$ Level 2

a) $4 \cdot (x-2) = -2 \cdot (x+1)$ **b)** $2 \cdot (5 - 3 \cdot x) - 4 \cdot (x+2) = 12$ **c)** $a \cdot (x+b) = x \cdot (c+d)$

Level 4

Forme nach x um.

Multipliziere beide Seiten mit einem Term, der alle Nenner eliminiert. $\rightsquigarrow$ Level 3

a) $\dfrac{42}{x} = 7$ **b)** $\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{4}{x+6}$ **c)** $\dfrac{x+1}{3} = 2 - \dfrac{x-5}{2}$ **d)** $\dfrac{4}{a} = \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{x}$

Formeln systematisch umformen MmF

Die Formel $\frac{3}{a} = b \cdot \left(\frac{x}{x+2} - 5 \cdot c\right)$ soll nach x umgeformt werden. Dafür kannst du so vorgehen:

i) Multipliziere alle Klammern aus. Level 5

$$\frac{3}{a} = \frac{b \cdot x}{x+2} - 5 \cdot b \cdot c \qquad | \cdot a \cdot (x+2)$$

ii) Multipliziere beide Seiten mit einem Term, der alle Nenner eliminiert, also mit $a \cdot (x+2)$ hier.
Beachte beim Multiplizieren, dass die rechte Seite die Struktur ☺ − △ hat.
Multipliziert man (☺ − △) mit $a \cdot (x+2)$ dann erhält man also ☺ $\cdot a \cdot (x+2) -$ △ $\cdot a \cdot (x+2)$. Level 4

$$3 \cdot (x+2) = a \cdot b \cdot x - 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot (x+2)$$

iii) Multipliziere alle Klammern aus. Level 3

$$3 \cdot x + 6 = a \cdot b \cdot x - 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot x - 10 \cdot a \cdot b \cdot c \qquad (\star)$$

Nach dem Ausmultiplizieren aller Brüche und Klammern ist die Formel $(\star)$ also linear in x.
In solchen Fällen kannst du die Formel eindeutig nach x umformen.

iv) Bringe nur mithilfe von Additionen und Subtraktionen alle Terme mit x auf eine Seite und alle Terme ohne x auf die andere Seite. Level 2

$$3 \cdot x + 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot x - a \cdot b \cdot x = -10 \cdot a \cdot b \cdot c - 6$$

v) Hebe x heraus. Level 1

$$x \cdot (3 + 5 \cdot a \cdot b \cdot c - a \cdot b) = -10 \cdot a \cdot b \cdot c - 6$$

vi) Dividiere durch den Klammerausdruck.

$$x = \frac{-10 \cdot a \cdot b \cdot c - 6}{3 + 5 \cdot a \cdot b \cdot c - a \cdot b}$$

Level 5 MmF

Forme nach x um.
Multipliziere alle Klammern aus und vereinfache. ⇝ Level 4

$$a \cdot \frac{x-2}{b} = c \cdot \left(\frac{x}{d} + 1\right)$$