### Gleichungen in 1 Variable

In der Gleichung $4 \cdot x + 2 = 14$ kommt *eine* Variable vor, nämlich $x$.

**1)** Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 5 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $4 \cdot 5 + 2 = 22$ Rechte Seite: $14$ ✗

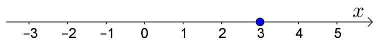
**2)** Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 3 eine Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $4 \cdot 3 + 2 = 14$ Rechte Seite: $14$ ✓

**3)** Zeige mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die Zahl 3 die *einzige* Lösung der Gleichung ist.

$$
\begin{aligned}
4 \cdot x + 2 &= 14 \quad &&| -2 \\
4 \cdot x &= 12 \quad &&| :4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $x = 3$ hat offensichtlich nur eine Lösung, nämlich 3.
Also haben auch die beiden Gleichungen darüber nur diese eine Lösung.




### Kartesisches Koordinatensystem

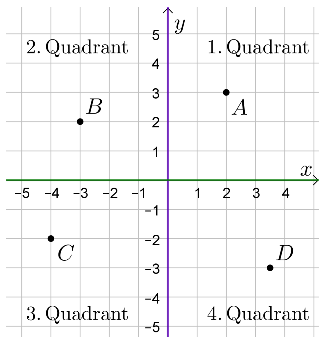
Rechts siehst du, wie die **Zahlenebene** durch 2 Achsen in 4 Quadranten unterteilt wird.

Die **waagrechte Achse** heißt auch $x$-Achse, horizontale Achse, 1. Achse oder Abszisse.

Die **senkrechte Achse** heißt auch $y$-Achse, vertikale Achse, 2. Achse oder Ordinate.

Jeder Punkt in der Zahlenebene wird eindeutig durch Angabe seiner beiden **Koordinaten** festgelegt. Zum Beispiel:

$$A = (2 \mid 3) \quad B = (-3 \mid 2) \quad C = (-4 \mid -2) \quad D = (3{,}5 \mid -3)$$




Die Menge aller Zahlenpaare $(x \mid y)$ mit reellen Zahlen $x$ und $y$ wird mit $\mathbb{R}^2$ abgekürzt.

### Lineare Gleichungen in 2 Variablen

In der Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ kommen *zwei* Variablen vor, nämlich $x$ und $y$.

Die Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ ist eine Bedingung an die Zahlen $x$ und $y$.

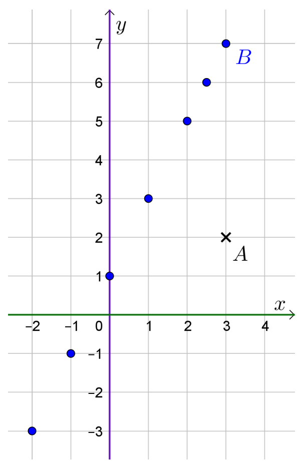
Wir suchen nach **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

$A = (3 \mid 2)$ ist *keine* Lösung der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 2 \neq 1$ . ✗

$B = (3 \mid 7)$ ist eine **Lösung** der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 7 = 1$ . ✓

In einer **Wertetabelle** tragen wir weitere Lösungen der Gleichung ein. Ergänze die Koordinaten so, dass die Zahlenpaare Lösungen sind.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $6$ |




Zeichne diese Lösungen als Punkte im Koordinatensystem rechts ein.

Tatsächlich hat jede **lineare Gleichung** $\boldsymbol{a \cdot x + b \cdot y = c}$ *unendlich* viele Lösungen, $(a \mid b) \neq (0 \mid 0)$
und die Lösungen liegen auf einer Gerade.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Geradengleichungen.

**Gleichungssysteme**

Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ x+y=5 \\ \mathrm{II}:&\ 2\cdot x-3\cdot y=0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus 2 Gleichungen mit insgesamt 2 Variablen $x$ und $y$.
Da I und II jeweils lineare Gleichungen sind, ist es ein **lineares Gleichungssystem**.

Jedes Zahlenpaar, das eine Lösung *aller* Gleichungen ist, heißt **Lösung des Gleichungssystems**:

Das Zahlenpaar $(4\,|\,1)$ ist eine Lösung von I, aber *keine* Lösung von II. $4+1=5$ ✓ $2\cdot4-3\cdot1\neq0$ ✗
Das Zahlenpaar $(4\,|\,1)$ ist also *keine* Lösung dieses Gleichungssystems.

Das Zahlenpaar $(3\,|\,2)$ ist eine Lösung von beiden Gleichungen I und II. $3+2=5$ ✓ $2\cdot3-3\cdot2=0$ ✓
Das Zahlenpaar $(3\,|\,2)$ ist also eine Lösung dieses Gleichungssystems. Gibt es weitere Lösungen?

**Eliminationsverfahren**

Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Eliminationsverfahren** lösen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ x+y=5 \\ \mathrm{II}:&\ 2\cdot x-3\cdot y=0 \end{aligned}$$

**1)** Suche dir eine der beiden Variablen $x$ oder $y$ aus. Bei der folgenden Rechnung wählen wir $y$ aus. Multipliziere I bzw. II jeweils so, dass die **Koeffizienten** von $y$ bis auf das Vorzeichen gleich sind:

$$\begin{aligned} 3\cdot\mathrm{I}:&\ 3\cdot x+3\cdot y=15 \\ 1\cdot\mathrm{II}:&\ 2\cdot x-3\cdot y=0 \end{aligned}$$

Diese Multiplikationen sind Äquivalenzumformungen.
Sie verändern also *nicht* die Lösungen der Gleichungen.

**2)** Addiere die beiden Gleichungen, um die ausgewählte Variable zu *eliminieren*:

$$5\cdot x+0\cdot y=15$$

Warum darf man einfach die Gleichungen addieren?

Aus $A=B$ und $C=D$ folgt, dass $A=B$ und $A+C=B+D$ gilt.
Aus $A=B$ und $A+C=B+D$ folgt, dass $A=B$ und $C=D$ gilt.

Das Gleichungssystem $\{A=B,\ C=D\}$ hat also die gleichen Lösungen wie das Gleichungssystem $\{A=B,\ A+C=B+D\}$.

**3)** Löse die Gleichung in einer Variable:

$$\begin{aligned} 5\cdot x&=15 \qquad \big|\ :5 \\ x&=3 \end{aligned}$$

**4)** Setze in I oder II ein, um die zugehörige $y$-Koordinate der Lösung zu berechnen:

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{I}}{\Longrightarrow}\ 3+y&=5 \qquad \big|\ -3 \\ y&=2 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x\,|\,y)=(3\,|\,2)$.

**Eliminationsverfahren**

Löse das Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ 3\cdot x+4\cdot y=-9 \\ \mathrm{II}:&\ 2\cdot x-5\cdot y=17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot\mathrm{I}:&\ 6\cdot x+8\cdot y=-18 \\ (-3)\cdot\mathrm{II}:&\ -6\cdot x+15\cdot y=-51 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ 23\cdot y=-69 \ \Longrightarrow\ y=-3$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\Longrightarrow}\ 3\cdot x+4\cdot(-3)=-9 \ \Longrightarrow\ x=1$$

**Einsetzungsverfahren**

Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Einsetzungsverfahren** lösen:

**1)** Suche dir eine der beiden Gleichungen und eine der beiden Variablen $x$ oder $y$ aus.
Forme die Gleichung nach dieser Variable um:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ x+y=5 \qquad \Longrightarrow\ y=5-x \quad (\star)\\ \mathrm{II}:&\ 2\cdot x-3\cdot y=0 \end{aligned}$$

**2)** *Setze* in die andere Gleichung *ein* und löse diese Gleichung in einer Variable:

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{II}}{\Longrightarrow}\ 2\cdot x-3\cdot(5-x)&=0\\ 2\cdot x-15+3\cdot x&=0\\ 5\cdot x&=15\\ x&=3 \end{aligned}$$

**3)** Setze in $(\star)$ ein, um die zugehörige $y$-Koordinate zu berechnen:

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow}\ y=5-3=2$$

Das lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x \mid y)=(3 \mid 2)$.

**Einsetzungsverfahren**

Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ 3\cdot x+4\cdot y=-9\\ \mathrm{II}:&\ 2\cdot x-5\cdot y=17 \qquad \Longrightarrow\ x=\frac{17+5\cdot y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{I}}{\Longrightarrow}\ \frac{51+15\cdot y}{2}+4\cdot y&=-9\\ 51+15\cdot y+8\cdot y&=-18\\ 23\cdot y&=-69\\ y&=-3 \quad \Longrightarrow\ x=\frac{17+5\cdot(-3)}{2}=1 \end{aligned}$$

**Zahlenrätsel**

Die Summe von zwei positiven Zahlen $x$ und $y$ ist doppelt so groß wie ihre Differenz $x-y$.
Die größere Zahl $x$ ist um 6 größer als das Doppelte der kleineren Zahl $y$.
Berechne die beiden Zahlen.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ x+y=2\cdot(x-y) \iff x+y=2\cdot x-2\cdot y \iff 3\cdot y=x\\ \mathrm{II}:&\ x=2\cdot y+6 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ 3\cdot y=2\cdot y+6 \Longrightarrow\ y=6 \Longrightarrow\ x=18$$

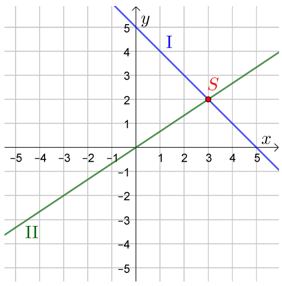
Die beiden Zahlen sind 18 und 6.

Probe: 24 ist doppelt so groß wie 12. ✓ 18 ist um 6 größer als 12. ✓

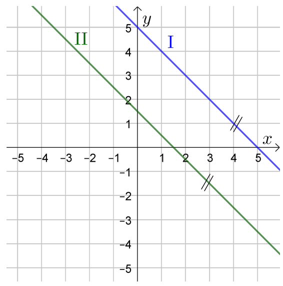
**Lineares Gleichungssystem – Lösungsfälle**

Die Lösungen jeder *linearen* Gleichung in zwei Variablen liegen auf einer Gerade in der Zahlenebene. Für *lineare* Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen gibt es also folgende 3 Lösungsfälle:

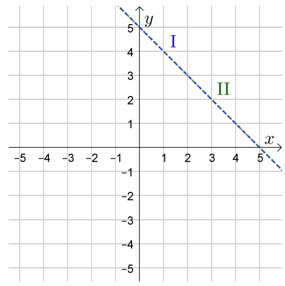
**a)** $\mathrm{I}: x + y = 5$
$\mathrm{II}: 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$




**b)** $\mathrm{I}: x + y = 5$
$\mathrm{II}: 2 \cdot x + 2 \cdot y = 3$




**c)** $\mathrm{I}: x + y = 5$
$\mathrm{II}: 2 \cdot x + 2 \cdot y = 10$




Die Lösung $(x \mid y) = (3 \mid 2)$ von **a)** haben wir bereits berechnet. Zeichne sie links oben ein.
Versuche **b)** und **c)** mit dem Eliminationsverfahren oder Einsetzungsverfahren zu lösen. Was passiert?

**b)** Beide Variablen fallen weg.
Übrig bleibt eine *falsche* Aussage:

$$0 = 3 \quad \text{f. A.}$$

Das Gleichungssystem hat *keine* Lösung.
Die Geraden sind parallel und haben keinen Schnittpunkt.

**c)** Beide Variablen fallen weg.
Übrig bleibt eine *wahre* Aussage:

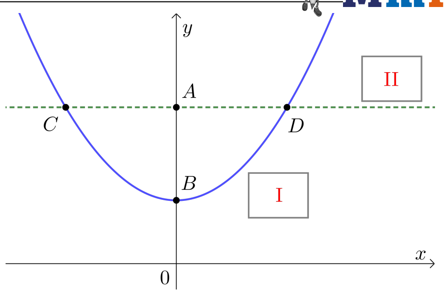
$$0 = 0 \quad \text{w. A.}$$

Das Gleichungssystem hat *unendlich viele* Lösungen, nämlich alle Lösungen der Gleichung $x + y = 5$.
Die Geraden sind ident.

**Nichtlineares Gleichungssystem**

Das folgende Gleichungssystem ist *nicht* linear:

$$\mathrm{I}: x^2 = y - 17$$
$$\mathrm{II}: y - 42 = 0$$




Die Lösungen der Gleichung I und die Lösungen der Gleichung II sind rechts grafisch dargestellt.

**1)** Trage I bzw. II richtig in die Kästchen ein.

**2)** Berechne die Schnittpunkte $A$ und $B$ auf der $y$-Achse.

**3)** Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren. Berechne die Schnittpunkte $C$ und $D$.

**2)** Die Punkte $A$ und $B$ liegen auf der $y$-Achse und haben deshalb die $x$-Koordinate 0.

$y - 42 = 0 \iff y = 42 \qquad A = (0 \mid 42)$

$0 = y - 17 \iff y = 17 \qquad B = (0 \mid 17)$

**3)** $\mathrm{I}: x^2 = y - 17$
$\mathrm{II}: y - 42 = 0 \implies y = 42$

$$\xRightarrow{\mathrm{I}} x^2 = 42 - 17 \implies x^2 = 25 \implies x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Die Schnittpunkte sind die Lösungen des Gleichungssystems: $C = (-5 \mid 42) \qquad D = (5 \mid 42)$