

In der Gleichung $4 \cdot x + 2 = 14$ kommt *eine* Variable vor, nämlich x .

1) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 5 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $4 \cdot 5 + 2 = 22$ Rechte Seite: 14 ✗

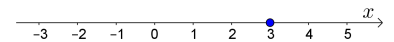
2) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 3 eine Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $4 \cdot 3 + 2 = 14$ Rechte Seite: 14 ✓

3) Zeige mithilfe von **Äquivalenzumformungen**, dass die Zahl 3 die *einzig*e Lösung der Gleichung ist.

$$\begin{array}{r|l} 4 \cdot x + 2 = 14 & | -2 \\ 4 \cdot x = 12 & | :4 \\ x = 3 & \end{array}$$

Die Gleichung $x = 3$ hat offensichtlich nur eine Lösung, nämlich 3.
Also haben auch die beiden Gleichungen darüber nur diese eine Lösung.



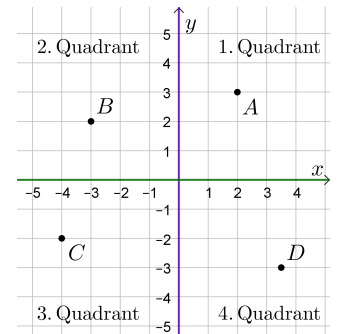
Rechts siehst du, wie die **Zahlenebene** durch 2 Achsen in 4 Quadranten unterteilt wird.

Die **waagrechte Achse** heißt auch x -Achse, horizontale Achse, 1. Achse oder Abszisse.

Die **senkrechte Achse** heißt auch y -Achse, vertikale Achse, 2. Achse oder Ordinate.

Jeder Punkt in der Zahlenebene wird eindeutig durch Angabe seiner beiden **Koordinaten** festgelegt. Zum Beispiel:

$A = (2 | 3)$ $B = (-3 | 2)$ $C = (-4 | -2)$ $D = (3,5 | -3)$



Die Menge aller Zahlenpaare $(x | y)$ mit **reellen** Zahlen x und y wird mit \mathbb{R}^2 abgekürzt.

In der Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ kommen *zwei* Variablen vor, nämlich x und y .

Die Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ ist eine Bedingung an die Zahlen x und y .

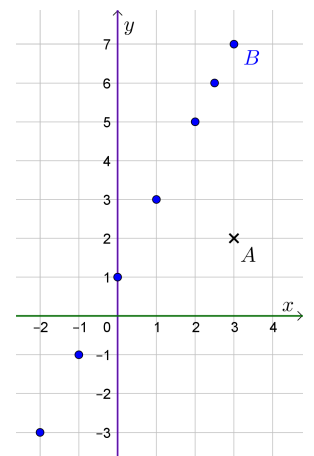
Wir suchen nach **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

$A = (3 | 2)$ ist *keine* Lösung der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 2 \neq 1$. ✗

$B = (3 | 7)$ ist eine **Lösung** der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 7 = 1$. ✓

In einer **Wertetabelle** tragen wir weitere Lösungen der Gleichung ein. Ergänze die Koordinaten so, dass die Zahlenpaare Lösungen sind.

x	-2	-1	0	1	2	2,5
y	-3	-1	1	3	5	6



Zeichne diese Lösungen als Punkte im Koordinatensystem rechts ein.

Tatsächlich hat jede **lineare Gleichung** $a \cdot x + b \cdot y = c$ *unendlich* viele Lösungen, $(a | b) \neq (0 | 0)$ und die Lösungen liegen auf einer Gerade. Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Geradengleichungen](#).



Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen, zum Beispiel:

$$\text{I: } x + y = 5$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus 2 Gleichungen mit insgesamt 2 Variablen x und y .
Da I und II jeweils lineare Gleichungen sind, ist es ein **lineares Gleichungssystem**.

Jedes Zahlenpaar, das eine Lösung *aller* Gleichungen ist, heißt **Lösung des Gleichungssystems**:

Das Zahlenpaar $(4 | 1)$ ist eine Lösung von I, aber *keine* Lösung von II. $4 + 1 = 5 \checkmark$ $2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \neq 0 \times$

Das Zahlenpaar $(4 | 1)$ ist also *keine* Lösung dieses Gleichungssystems.

Das Zahlenpaar $(3 | 2)$ ist eine Lösung von beiden Gleichungen I und II. $3 + 2 = 5 \checkmark$ $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0 \checkmark$

Das Zahlenpaar $(3 | 2)$ ist also eine Lösung dieses Gleichungssystems. Gibt es weitere Lösungen?



Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Eliminationsverfahren** lösen:

$$\text{I: } x + y = 5$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

- 1) Suche dir eine der beiden Variablen x oder y aus. Bei der folgenden Rechnung wählen wir y aus.
Multipliziere I bzw. II jeweils so, dass die **Koeffizienten** von y bis auf das Vorzeichen gleich sind:

$$3 \cdot \text{I: } 3 \cdot x + 3 \cdot y = 15$$

$$1 \cdot \text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

Diese Multiplikationen sind Äquivalenzumformungen.
Sie verändern also *nicht* die Lösungen der Gleichungen.

- 2) Addiere die beiden Gleichungen, um die ausgewählte Variable zu *eliminieren*:

$$5 \cdot x + 0 \cdot y = 15$$

Warum darf man einfach die Gleichungen addieren?

- 3) Löse die Gleichung in einer Variable:

$$5 \cdot x = 15 \quad | :5$$

$$x = 3$$

Aus $A = B$ und $C = D$ folgt, dass $A = B$ und $A + C = B + D$ gilt.
Aus $A = B$ und $A + C = B + D$ folgt, dass $A = B$ und $C = D$ gilt.

Das Gleichungssystem $\{A = B, C = D\}$ hat also die gleichen
Lösungen wie das Gleichungssystem $\{A = B, A + C = B + D\}$.

- 4) Setze in I oder II ein, um die zugehörige y -Koordinate der Lösung zu berechnen:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}} 3 + y = 5 \quad | -3 \\ y = 2 \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x | y) = (3 | 2)$.



Löse das Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren.

$$\text{I: } 3 \cdot x + 4 \cdot y = -9$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 5 \cdot y = 17$$

$$2 \cdot \text{I: } 6 \cdot x + 8 \cdot y = -18$$

$$(-3) \cdot \text{II: } -6 \cdot x + 15 \cdot y = -51$$

$$\implies 23 \cdot y = -69 \implies y = -3$$

$$\xrightarrow{\text{I}} 3 \cdot x + 4 \cdot (-3) = -9 \implies x = 1$$



Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Einsetzungsverfahren** lösen:

- 1) Suche dir eine der beiden Gleichungen und eine der beiden Variablen x oder y aus.

Forme die Gleichung nach dieser Variable um:

$$\text{I: } x + y = 5 \quad \Longrightarrow \quad y = 5 - x \quad (*)$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

- 2) Setze in die andere Gleichung *ein* und löse diese Gleichung in einer Variable:

$$\stackrel{\text{II}}{\Longrightarrow} 2 \cdot x - 3 \cdot (5 - x) = 0$$

$$2 \cdot x - 15 + 3 \cdot x = 0$$

$$5 \cdot x = 15$$

$$x = 3$$

- 3) Setze in $(*)$ ein, um die zugehörige y -Koordinate zu berechnen:

$$\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} y = 5 - 3 = 2$$

Das lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x | y) = (3 | 2)$.



Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

$$\text{I: } 3 \cdot x + 4 \cdot y = -9$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 5 \cdot y = 17 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{17 + 5 \cdot y}{2}$$

$$\stackrel{\text{I}}{\Longrightarrow} \frac{51 + 15 \cdot y}{2} + 4 \cdot y = -9$$

$$51 + 15 \cdot y + 8 \cdot y = -18$$

$$23 \cdot y = -69$$

$$y = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{17 + 5 \cdot (-3)}{2} = 1$$



Die Summe von zwei positiven Zahlen x und y ist doppelt so groß wie ihre Differenz $x - y$.

Die größere Zahl x ist um 6 größer als das Doppelte der kleineren Zahl y .

Berechne die beiden Zahlen.

$$\text{I: } x + y = 2 \cdot (x - y) \iff x + y = 2 \cdot x - 2 \cdot y \iff 3 \cdot y = x$$

$$\text{II: } x = 2 \cdot y + 6$$

$$\Longrightarrow 3 \cdot y = 2 \cdot y + 6 \Longrightarrow y = 6 \Longrightarrow x = 18$$

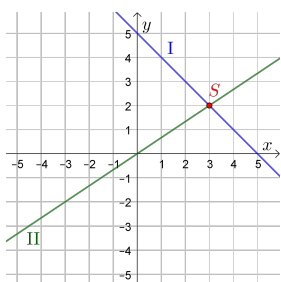
Die beiden Zahlen sind 18 und 6.

Probe: 24 ist doppelt so groß wie 12. ✓ 18 ist um 6 größer als 12. ✓

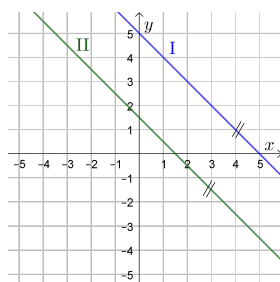


Die Lösungen jeder *linearen* Gleichung in zwei Variablen liegen auf einer Geraden in der Zahlenebene. Für *lineare* Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen gibt es also folgende 3 Lösungsfälle:

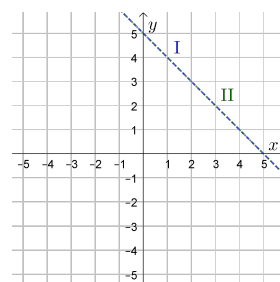
a) I : $x + y = 5$
 II : $2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$



b) I : $x + y = 5$
 II : $2 \cdot x + 2 \cdot y = 3$



c) I : $x + y = 5$
 II : $2 \cdot x + 2 \cdot y = 10$



Die Lösung $(x | y) = (3 | 2)$ von a) haben wir bereits berechnet. Zeichne sie links oben ein. Versuche b) und c) mit dem Eliminationsverfahren oder Einsetzungsverfahren zu lösen. Was passiert?

b) Beide Variablen fallen weg.
 Übrig bleibt eine *falsche* Aussage:

$0 = 3$ f. A.

Das Gleichungssystem hat *keine* Lösung.
 Die Geraden sind parallel und haben keinen Schnittpunkt.

c) Beide Variablen fallen weg.
 Übrig bleibt eine *wahre* Aussage:

$0 = 0$ w. A.

Das Gleichungssystem hat *unendlich viele* Lösungen, nämlich alle Lösungen der Gleichung $x + y = 5$. Die Geraden sind ident.

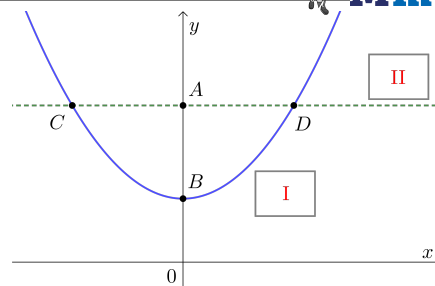
Nichtlineares Gleichungssystem



Das folgende Gleichungssystem ist *nicht* linear:

I : $x^2 = y - 17$
 II : $y - 42 = 0$

Die Lösungen der Gleichung I und die Lösungen der Gleichung II sind rechts grafisch dargestellt.



- 1) Trage I bzw. II richtig in die Kästchen ein.
- 2) Berechne die Schnittpunkte A und B auf der y-Achse.
- 3) Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren. Berechne die Schnittpunkte C und D.

2) Die Punkte A und B liegen auf der y-Achse und haben deshalb die x-Koordinate 0.

$y - 42 = 0 \iff y = 42 \quad A = (0 | 42)$
 $0 = y - 17 \iff y = 17 \quad B = (0 | 17)$

3) I : $x^2 = y - 17$
 II : $y - 42 = 0 \implies y = 42$

$\xrightarrow{I} x^2 = 42 - 17 \implies x^2 = 25 \implies x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Die Schnittpunkte sind die Lösungen des Gleichungssystems: $C = (-5 | 42) \quad D = (5 | 42)$

