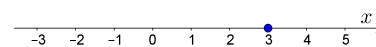




In der **Gleichung** $4 \cdot x + 2 = 14$ kommt *eine* Variable vor, nämlich x .

- 1) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 5 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.
- 2) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 3 eine Lösung dieser Gleichung ist.
- 3) Zeige mithilfe von **Äquivalenzumformungen**, dass die Zahl 3 die *einzige* Lösung der Gleichung ist.



Kartesisches Koordinatensystem



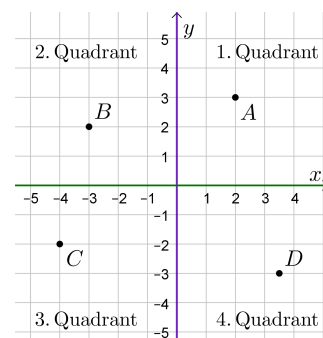
Rechts siehst du, wie die **Zahlenebene** durch 2 Achsen in 4 Quadranten unterteilt wird.

Die **waagrechte Achse** heißt auch x -Achse, horizontale Achse, 1. Achse oder Abszisse.

Die **senkrechte Achse** heißt auch y -Achse, vertikale Achse, 2. Achse oder Ordinate.

Jeder Punkt in der Zahlenebene wird eindeutig durch Angabe seiner beiden **Koordinaten** festgelegt. Zum Beispiel:

$$A = (2 \mid 3) \quad B = (-3 \mid 2) \quad C = (-4 \mid -2) \quad D = (3,5 \mid -3)$$



Die Menge aller Zahlenpaare $(x \mid y)$ mit **reellen** Zahlen x und y wird mit $\mathbb{R}^2$ abgekürzt.

Lineare Gleichungen in 2 Variablen



In der Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ kommen *zwei* Variablen vor, nämlich x und y .

Die Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ ist eine Bedingung an die Zahlen x und y .

Wir suchen nach **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

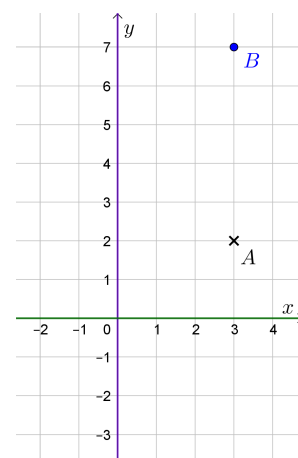
$A = (3 \mid 2)$ ist *keine* Lösung der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 2 \neq 1$. ✗

$B = (3 \mid 7)$ ist eine **Lösung** der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 7 = 1$. ✓

In einer **Wertetabelle** tragen wir weitere Lösungen der Gleichung ein. Ergänze die Koordinaten so, dass die Zahlenpaare Lösungen sind.

x	-2	-1	0	1	2	
y						6

Zeichne diese Lösungen als Punkte im Koordinatensystem rechts ein.



Tatsächlich hat jede **lineare Gleichung** $a \cdot x + b \cdot y = c$ *unendlich* viele Lösungen, $(a \mid b) \neq (0 \mid 0)$ und die Lösungen liegen auf einer Gerade. Mehr dazu findest du auf dem **Arbeitsblatt – Geradengleichungen**.

Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen, zum Beispiel:

$$\text{I: } x + y = 5$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus 2 Gleichungen mit insgesamt 2 Variablen x und y .
Da I und II jeweils lineare Gleichungen sind, ist es ein **lineares Gleichungssystem**.

Jedes Zahlenpaar, das eine Lösung *aller* Gleichungen ist, heißt **Lösung des Gleichungssystems**:

Das Zahlenpaar $(4 | 1)$ ist eine Lösung von I, aber *keine* Lösung von II. $4 + 1 = 5 \checkmark$ $2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \neq 0 \times$

Das Zahlenpaar $(4 | 1)$ ist also *keine* Lösung dieses Gleichungssystems.

Das Zahlenpaar $(3 | 2)$ ist eine Lösung von beiden Gleichungen I und II. $3 + 2 = 5 \checkmark$ $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0 \checkmark$

Das Zahlenpaar $(3 | 2)$ ist also eine Lösung dieses Gleichungssystems. Gibt es weitere Lösungen?

Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Eliminationsverfahren** lösen:

$$\text{I: } x + y = 5$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

- 1) Suche dir eine der beiden Variablen x oder y aus. Bei der folgenden Rechnung wählen wir y aus.
Multipliziere I bzw. II jeweils so, dass die **Koeffizienten** von y bis auf das Vorzeichen gleich sind:

$$3 \cdot \text{I: } 3 \cdot x + 3 \cdot y = 15$$

$$1 \cdot \text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

Diese Multiplikationen sind Äquivalenzumformungen.
Sie verändern also *nicht* die Lösungen der Gleichungen.

- 2) Addiere die beiden Gleichungen, um die ausgewählte Variable zu *eliminieren*:

$$5 \cdot x + 0 \cdot y = 15$$

Warum darf man einfach die Gleichungen addieren?

- 3) Löse die Gleichung in einer Variable:

$$5 \cdot x = 15 \quad | :5$$

$$x = 3$$

Aus $A = B$ und $C = D$ folgt, dass $A = B$ und $A + C = B + D$ gilt.
Aus $A = B$ und $A + C = B + D$ folgt, dass $A = B$ und $C = D$ gilt.

Das Gleichungssystem $\{A = B, C = D\}$ hat also die gleichen
Lösungen wie das Gleichungssystem $\{A = B, A + C = B + D\}$.

- 4) Setze in I oder II ein, um die zugehörige y -Koordinate der Lösung zu berechnen:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}} 3 + y = 5 \\ y = 2 \end{array} \quad | -3$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x | y) = (3 | 2)$.

Löse das Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren.

$$\text{I: } 3 \cdot x + 4 \cdot y = -9$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 5 \cdot y = 17$$



Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Einsetzungsverfahren** lösen:

- 1) Suche dir eine der beiden Gleichungen und eine der beiden Variablen x oder y aus.

Forme die Gleichung nach dieser Variable um:

$$\text{I: } x + y = 5 \quad \implies y = 5 - x \quad (\star)$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

- 2) Setze in die andere Gleichung *ein* und löse diese Gleichung in einer Variable:

$$\stackrel{\text{II}}{\implies} 2 \cdot x - 3 \cdot (5 - x) = 0$$

$$2 \cdot x - 15 + 3 \cdot x = 0$$

$$5 \cdot x = 15$$

$$x = 3$$

- 3) Setze in $(\star)$ ein, um die zugehörige y -Koordinate zu berechnen:

$$\stackrel{(\star)}{\implies} y = 5 - 3 = 2$$

Das lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x \mid y) = (3 \mid 2)$.



Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

$$\text{I: } 3 \cdot x + 4 \cdot y = -9$$

$$\text{II: } 2 \cdot x - 5 \cdot y = 17$$



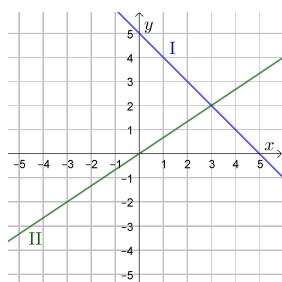
Die Summe von zwei positiven Zahlen x und y ist doppelt so groß wie ihre Differenz $x - y$.

Die größere Zahl x ist um 6 größer als das Doppelte der kleineren Zahl y .

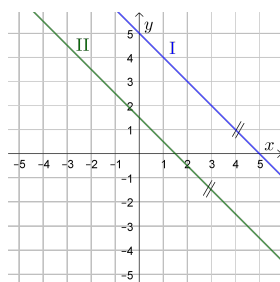
Berechne die beiden Zahlen.

Die Lösungen jeder *linearen* Gleichung in zwei Variablen liegen auf einer Gerade in der Zahlenebene. Für *lineare* Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen gibt es also folgende 3 Lösungsfälle:

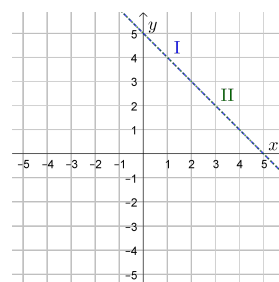
a) I : $x + y = 5$
II : $2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$



b) I : $x + y = 5$
II : $2 \cdot x + 2 \cdot y = 3$



c) I : $x + y = 5$
II : $2 \cdot x + 2 \cdot y = 10$



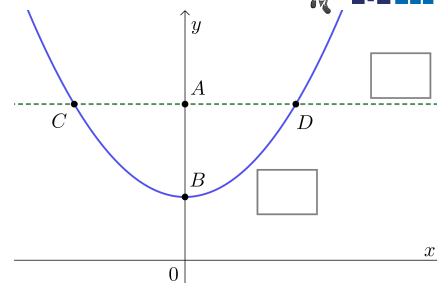
Die Lösung $(x | y) = (3 | 2)$ von a) haben wir bereits berechnet. Zeichne sie links oben ein.

Versuche b) und c) mit dem Eliminationsverfahren oder Einsetzungsverfahren zu lösen. Was passiert?

Das folgende Gleichungssystem ist *nicht* linear:

I : $x^2 = y - 17$
II : $y - 42 = 0$

Die Lösungen der Gleichung I und die Lösungen der Gleichung II sind rechts grafisch dargestellt.



- 1) Trage I bzw. II richtig in die Kästchen ein.
- 2) Berechne die Schnittpunkte A und B auf der y-Achse.
- 3) Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren. Berechne die Schnittpunkte C und D.

