

Die Gleichung $\sin(\alpha) = 0,6$ hat zwei Lösungen $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ[$, weil $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$ gilt.

Diesmal messen wir die Winkel im **Bogenmaß**.

Dann hat die Gleichung $\sin(x) = 0,6$ dementsprechend zwei Lösungen $x \in [0 \text{ rad}; 2 \cdot \pi \text{ rad}[$.

- 1) Der rechts eingezeichnete Winkel x_1 ist eine Lösung.

Es gilt: $x_1 = 0,643\dots \text{ rad}$

Der zugehörige Winkelbogen am Einheitskreis

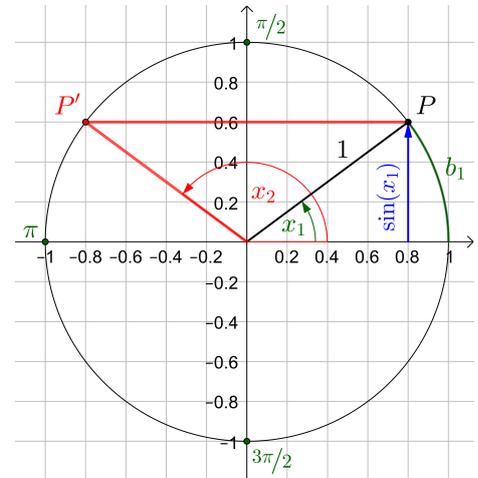
hat also die Länge $b_1 = 0,643\dots$

- 2) Zeichne den zweiten Winkel x_2 ein, der die Gleichung löst.

Wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen sind, dann gilt:

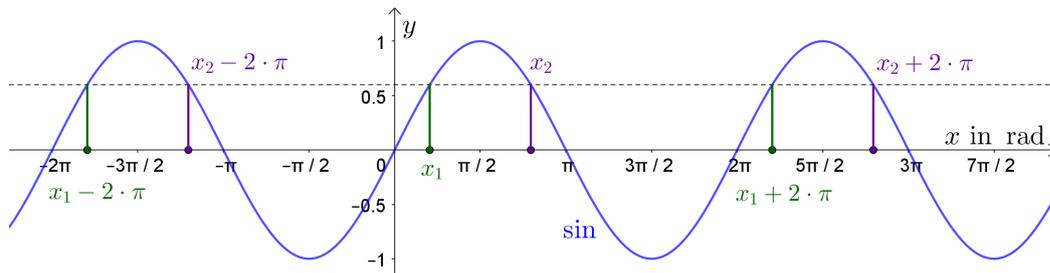
$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

- 3) Für die zweite Lösung x_2 gilt also: $x_2 = 2,498\dots \text{ rad}$



Tatsächlich hat die Gleichung $\sin(x) = 0,6$ über der Grundmenge \mathbb{R} unendlich viele Lösungen.

Der **Graph der Sinusfunktion** f mit $f(x) = \sin(x)$ ist dargestellt:



Die waagrechte strichlierte Gerade hat die Gleichung $y = 0,6$.

Die Schnittstellen dieser Gerade mit dem Graphen sind also die Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0,6$.

- 1) Für die eingezeichnete Lösung x_1 gilt: $x_1 = 0,643\dots \text{ rad}$

Nach jeder *vollständigen* Umdrehung am Einheitskreis ist der Sinuswert wieder gleich groß.

Neben x_1 sind also auch folgende Winkel Lösungen:

$$x_1 + 2 \cdot \pi, \quad x_1 + 4 \cdot \pi, \quad x_1 + 6 \cdot \pi, \dots \quad \text{sowie} \quad x_1 - 2 \cdot \pi, \quad x_1 - 4 \cdot \pi, \quad x_1 - 6 \cdot \pi, \dots$$

Diese unendlich vielen Lösungen können wir kurz so anschreiben:

$$x_{1,k} = x_1 + k \cdot 2 \cdot \pi = 0,643\dots + k \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{„Bergauf-Lösungen“}$$

- 2) Für die eingezeichnete Lösung x_2 gilt: $x_2 = 2,498\dots \text{ rad}$

Die zweite Hälfte der Lösungen ist also:

$$x_{2,k} = x_2 + k \cdot 2 \cdot \pi = 2,498\dots + k \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{„Bergab-Lösungen“}$$

Die Gleichung $\cos(\alpha) = 0,8$ hat zwei Lösungen $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ[$, weil $\cos(\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha)$ gilt.

Diesmal messen wir die Winkel im Bogenmaß.

Dann hat die Gleichung $\cos(x) = 0,8$ dementsprechend zwei Lösungen $x \in [0 \text{ rad}; 2 \cdot \pi \text{ rad}[$.

1) Der rechts eingezeichnete Winkel x_1 ist eine Lösung.

Es gilt: $x_1 = 0,643\dots \text{ rad}$

Der zugehörige Winkelbogen am Einheitskreis

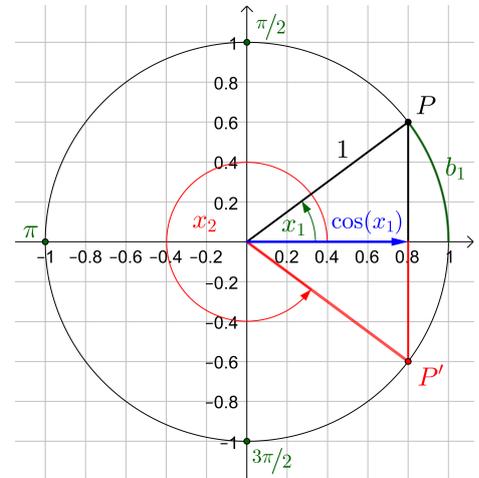
hat also die Länge $b_1 = 0,643\dots$

2) Zeichne den zweiten Winkel x_2 ein, der die Gleichung löst.

Wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen sind, dann gilt:

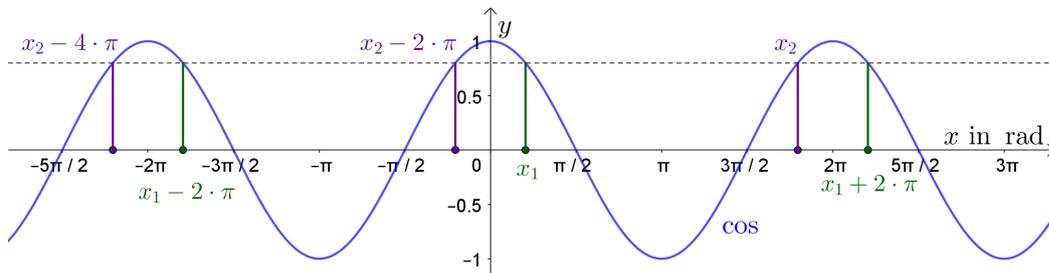
$$\cos(x) = \cos(2 \cdot \pi - x)$$

3) Für die zweite Lösung x_2 gilt also: $x_2 = 5,639\dots \text{ rad}$



Tatsächlich hat die Gleichung $\cos(x) = 0,8$ über der Grundmenge \mathbb{R} unendlich viele Lösungen.

Der Graph der Cosinusfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$ ist dargestellt:



Die waagrechte strichlierte Gerade hat die Gleichung $y = 0,8$.

Die Schnittstellen dieser Gerade mit dem Graphen sind also die Lösungen der Gleichung $\cos(x) = 0,8$.

1) Für die eingezeichnete Lösung x_1 gilt: $x_1 = 0,643\dots \text{ rad}$

Nach jeder *vollständigen* Umdrehung am Einheitskreis ist der Cosinuswert wieder gleich groß.

Neben x_1 sind also auch folgende Winkel Lösungen:

$$x_1 + 2 \cdot \pi, \quad x_1 + 4 \cdot \pi, \quad x_1 + 6 \cdot \pi, \dots \quad \text{sowie} \quad x_1 - 2 \cdot \pi, \quad x_1 - 4 \cdot \pi, \quad x_1 - 6 \cdot \pi, \dots$$

Diese unendlich vielen Lösungen können wir kurz so anschreiben:

$$x_{1,k} = x_1 + k \cdot 2 \cdot \pi = 0,643\dots + k \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{„Bergab-Lösungen“}$$

2) Für die eingezeichnete Lösung x_2 gilt: $x_2 = 5,639\dots \text{ rad}$

Die zweite Hälfte der Lösungen ist also:

$$x_{2,k} = x_2 + k \cdot 2 \cdot \pi = 5,639\dots + k \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{„Bergauf-Lösungen“}$$

Die Gleichung $\tan(\alpha) = 0,6$ hat zwei Lösungen $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ[$, weil $\tan(\alpha) = \tan(180^\circ + \alpha)$ gilt. Diesmal messen wir die Winkel im Bogenmaß.

Dann hat die Gleichung $\tan(x) = 0,6$ dementsprechend zwei Lösungen $x \in [0 \text{ rad}; 2 \cdot \pi \text{ rad}[$.

- 1) Der rechts eingezeichnete Winkel x_1 ist eine Lösung.

Es gilt: $x_1 = 0,540\dots \text{ rad}$

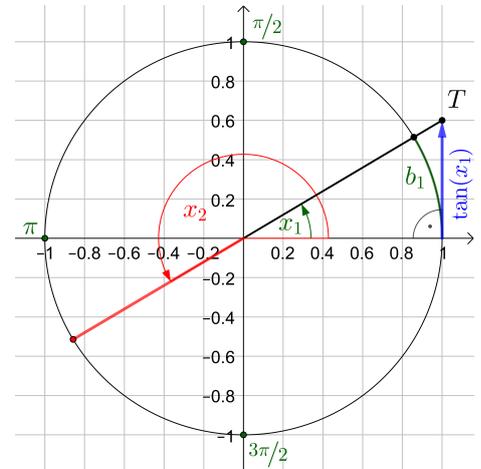
Der zugehörige Winkelbogen am Einheitskreis hat also die Länge $b_1 = 0,540\dots$

- 2) Zeichne den zweiten Winkel x_2 ein, der die Gleichung löst.

Wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen sind, dann gilt:

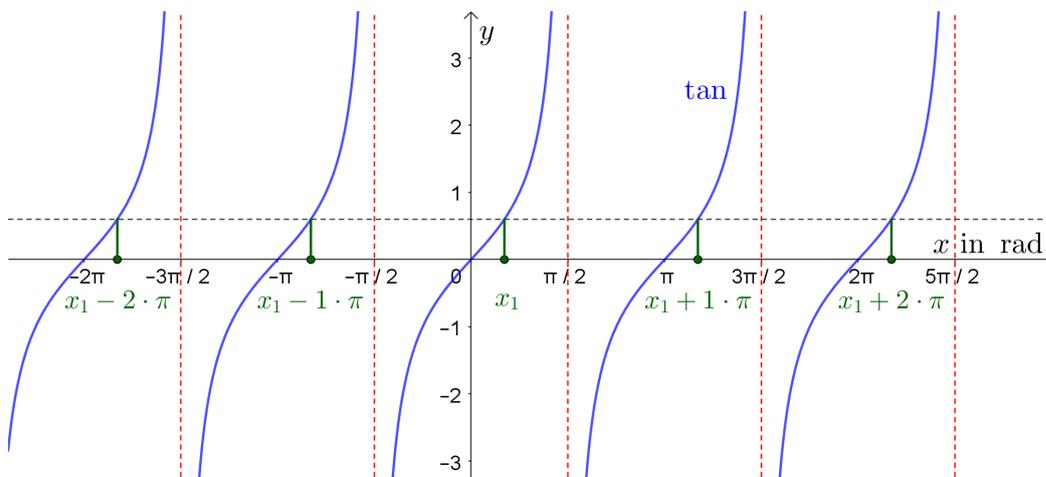
$$\tan(x) = \tan(\pi + x)$$

- 3) Für die zweite Lösung x_2 gilt also: $x_2 = 3,682\dots \text{ rad}$



Tatsächlich hat die Gleichung $\tan(x) = 0,6$ über der Grundmenge \mathbb{R} unendlich viele Lösungen.

Der Graph der Tangensfunktion f mit $f(x) = \tan(x)$ ist dargestellt:



Die waagrechte strichlierte Gerade hat die Gleichung $y = 0,6$.

Die Schnittstellen dieser Gerade mit dem Graphen sind also die Lösungen der Gleichung $\tan(x) = 0,6$.

Für die eingezeichnete Lösung x_1 gilt: $x_1 = 0,540\dots \text{ rad}$

Nach jeder *halben* Umdrehung am Einheitskreis ist der Tangenswert wieder gleich groß.

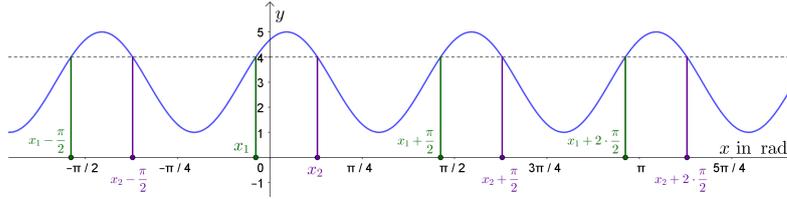
Neben x_1 sind also auch folgende Winkel Lösungen:

$$x_1 + 1 \cdot \pi, \quad x_1 + 2 \cdot \pi, \quad x_1 + 3 \cdot \pi, \dots \quad \text{sowie} \quad x_1 - 1 \cdot \pi, \quad x_1 - 2 \cdot \pi, \quad x_1 - 3 \cdot \pi, \dots$$

Diese unendlich vielen Lösungen können wir kurz so anschreiben:

$$x_{1,k} = x_1 + k \cdot \pi = 0,540\dots + k \cdot \pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Der Graph der **allgemeinen Sinusfunktion** f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(4 \cdot x + 1) + 3$ ist dargestellt.



Die Gleichung $2 \cdot \sin(4 \cdot x + 1) + 3 = 4$ kannst du über der Grundmenge \mathbb{R} folgendermaßen lösen:

1) Forme die Gleichung auf $\sin(\heartsuit) = \heartsuit$ um.

$$2 \cdot \sin(4 \cdot x + 1) = 1 \iff \sin(4 \cdot x + 1) = 0,5$$

2) Berechne die Lösungen $x_{1,k}$ der Gleichung aus $\heartsuit = \arcsin(\heartsuit) + k \cdot 2 \cdot \pi$.

$$4 \cdot x + 1 = \arcsin(0,5) + k \cdot 2 \cdot \pi \iff x = \frac{\arcsin(0,5) - 1}{4} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{4}$$

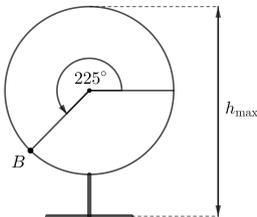
$$\implies x_{1,k} = -0,119... + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

3) Berechne die Lösungen $x_{2,k}$ der Gleichung aus $\heartsuit = \pi - \arcsin(\heartsuit) + k \cdot 2 \cdot \pi$.

$$4 \cdot x + 1 = \pi - \arcsin(0,5) + k \cdot 2 \cdot \pi \iff x = \frac{\pi - \arcsin(0,5) - 1}{4} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{4}$$

$$\implies x_{2,k} = 0,404... + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Ben fährt in einem Riesenrad, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn dreht.



- Das Riesenrad hat den Durchmesser $d = 40 \text{ m}$.
- Die Höhe des Riesenrads beträgt $h_{\text{max}} = 50 \text{ m}$.
- Eine vollständige Umdrehung des Riesenrads dauert 3 Minuten.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist Ben im dargestellten Punkt B am Riesenrad.

Erinnere dich an die **Zeigerdiagramme** für allgemeine Sinusfunktionen.

Für Bens Höhe h (in Metern) zum Zeitpunkt t (in Minuten) gilt also: $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$

1) Ermittle die Parameter A , ω , φ und c .

Winkel im Bogenmaß

2) Wie viele Sekunden ist Ben während einer Umdrehung mindestens 42m über dem Boden?

$$c = 30 \text{ m} \quad A = 20 \text{ m} \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2,094... \text{ rad/min} \quad \varphi = 225^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 3,926... \text{ rad}$$

$$h(t) = 42 \implies 42 = 20 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + 30 \implies 0,6 = \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\arcsin(0,6) = \omega \cdot t_1 + \varphi \implies t_1 = \frac{\arcsin(0,6) - \varphi}{\omega} = -1,567... \text{ min} \overset{+3 \text{ min}}{\approx} 1,432... \text{ min}$$

$$\arcsin(0,6) = \pi - (\omega \cdot t_2 + \varphi) \implies t_2 = \frac{\pi - \arcsin(0,6) - \varphi}{\omega} = -0,682... \text{ min} \overset{+3 \text{ min}}{\approx} 2,317... \text{ min}$$

Ben befindet sich pro Umdrehung $t_2 - t_1 = 0,885... \text{ min} = 53,1... \text{ s}$ in mindestens 42m Höhe.

