Unbeschränktes Wachstum

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = 2^n$ ist streng monoton wachsend. Es gilt also $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \geq 1$.

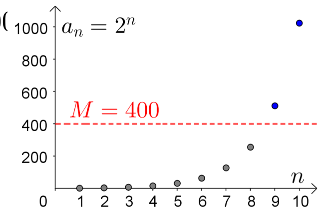
1) Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = 8 \qquad a_4 = 16 \qquad a_5 = 32$

2) Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als $M = 400$?

$$a_n > 400 \iff 2^n > 400 \iff n > \underbrace{\log_2(400)}_{=8{,}6\ldots}$$

Ab dem 9. Folgenglied sind alle größer als 400.



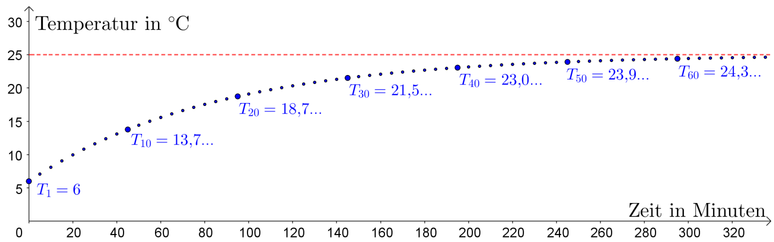
Tatsächlich wächst die Folge (a_n) unbeschränkt gegen unendlich (∞), das heißt:

Zu jeder noch so großen Zahl M gibt es ein Folgenglied, ab dem *alle* Glieder größer als M sind.

Wir schreiben dafür: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty}$ oder kurz $\boldsymbol{2^n \to \infty}$ „limit“ ist englisch für Grenze.

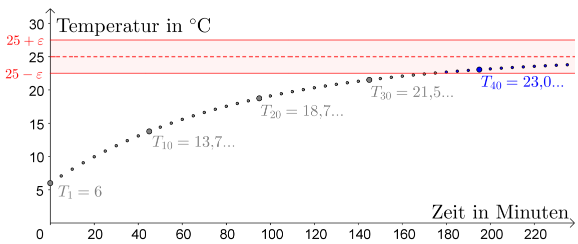
Beschränktes Wachstum

Du nimmst an einem Sommertag in forschender Absicht ein Getränk aus dem Kühlschrank und stellst es auf den Küchentisch. Alle 5 Minuten misst du die Temperatur des Getränks:



Die Folge der Messwerte $(T_1, T_2, T_3, \ldots)$ ist streng monoton wachsend.
Die Temperatur wird aber *nicht* unbeschränkt groß.

Die Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ mit $T_n = 25 - 19 \cdot e^{-0{,}0584\,\cdot\,(n-1)}$ ist streng monoton wachsend.



1) Berechne die angegebenen Folgenglieder.

$T_{10} = 13{,}76\ldots \qquad T_{100} = 24{,}94\ldots$

$T_{30} = 21{,}50\ldots \qquad T_{300} = 24{,}99\ldots$

2) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $T_n < 25$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Es gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit: $T_n = 25 - \underbrace{19 \cdot e^{-0{,}0584\cdot(n-1)}}_{>0} < 25$

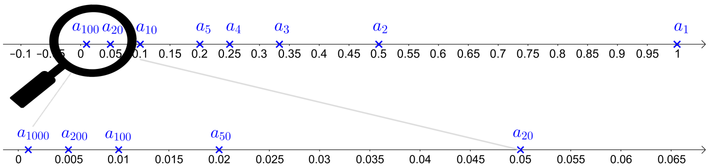
Tatsächlich hat die Folge (T_n) den Grenzwert 25.

Wir schreiben dafür: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 25}$ oder kurz $\boldsymbol{T_n \to 25}$

Harmonische Folge

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots\right)$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend.

Da Zähler und Nenner stets positiv sind, ist jedes Folgenglied größer als 0:



„0 ist eine untere Schranke der Folge.“

Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder kleiner als 0,001?

$$a_n < 0{,}001 \iff \frac{1}{n} < 0{,}001 \iff 1 < n \cdot 0{,}001 \iff 1000 < n \qquad \text{ab dem 1001. Folgenglied}$$

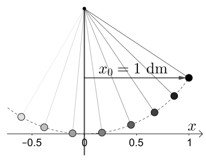
Tatsächlich ist die Zahl 0 der Grenzwert dieser Folge: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$ oder kurz $\boldsymbol{\frac{1}{n} \to 0}$

Gedämpfte Schwingung

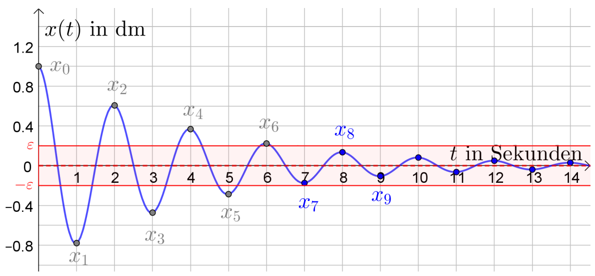
Auch Folgen, die *nicht* monoton sind, können einen Grenzwert haben.

Das rechts dargestellte Pendel schwingt hin und her.

Jeder Schwung dauert eine Sekunde.



Die maximale Auslenkung aus der Ruheposition nimmt mit jedem Schwung betragsmäßig ab. Reibung



Dabei gilt: $x(t) = e^{-0{,}25 \cdot t} \cdot \cos(\pi \cdot t)$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$x(t) \ldots$ horizontale Auslenkung in dm

Links siehst du den Graphen dieser Funktion.

Berechne die folgenden Funktionswerte.

Beachte, dass die Winkel im Bogenmaß sind.

$x_0 = x(0) = 1 \qquad x_1 = x(1) = -0{,}778\ldots \qquad x_2 = x(2) = 0{,}606\ldots$

$x_3 = x(3) = -0{,}472\ldots \qquad x_4 = x(4) = 0{,}367\ldots \qquad x_5 = x(5) = -0{,}286\ldots$

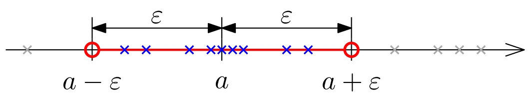
Tatsächlich gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-0{,}25 \cdot n} \cdot \cos(\pi \cdot n) = 0$ Der Faktor $\cos(\pi \cdot n)$ bleibt betragsmäßig ≤ 1 und $e^{-0{,}25 \cdot n} \to 0$.

Grenzwert einer konstanten Folge

Eine Folge *kann* ihren Grenzwert auch selbst enthalten.
Zum Beispiel hat die konstante Folge $(42; 42; 42; 42; \ldots)$ den Grenzwert 42.

Grenzwert einer Folge

Wenn die Folge (a_n) den **Grenzwert** a hat, schreiben wir $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$ bzw. $\boldsymbol{a_n \to a}$
und meinen damit ganz genau das Folgende:
„Zu jedem Intervall $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ gibt es ein Folgenglied, ab dem alle Glieder in diesem Intervall liegen.“



Das muss für jede noch so kleine *positive* Zahl ε gelten.
Das Intervall $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ nennt man dann auch ε-Umgebung von a.
Mehr dazu findest du am AB – Grenzwert von Folgen II.

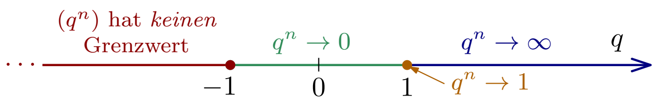
Geometrische Folge – Grenzwert

Das Verhalten der geometrischen Folge $(q^n)_{n\geq 1}$ hängt vom Wert der Basis q ab.
Berechne jeweils die ersten 4 Folgenglieder:

1) $q = 2$: $(2; 4; 8; 16; ...)$
2) $q = 1$: $(1; 1; 1; 1; ...)$
3) $q = 0{,}5$: $(0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; 0{,}0625; ...)$
4) $q = -2$: $(-2; 4; -8; 16; ...)$
5) $q = -1$: $(-1; 1; -1; 1; ...)$
6) $q = -0{,}5$: $(-0{,}5; 0{,}25; -0{,}125; 0{,}0625; ...)$

Allgemein gilt:

- Wenn $-1 < q < 1$, dann $q^n \to 0$.
- Wenn $q = 1$, dann $q^n \to 1$.
- Wenn $q > 1$, dann $q^n \to \infty$.
- Wenn $q \leq -1$, dann hat (q^n) *keinen* Grenzwert.



Mehr dazu findest du am AB – Grenzwert von Folgen II.

Grenzwertsätze

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gilt, dann kann man zeigen:

- $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}}$ $\quad b_n \neq 0,\ b \neq 0$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)}$, wenn f eine stetige Funktion ist und alle a_n und a in der Definitionsmenge von f sind.

Die elementaren Funktionen sind – überall dort, wo sie definiert sind – stetig.
Zum Beispiel:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{a_n} = 2^a$
iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln(a)$
v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(a_n) = \sin(a)$
vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \arccos(a_n) = \arccos(a)$

Grenzwertsätze

Wir ermitteln den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{16 - \frac{1}{n^2} + 0{,}42^n}$ mit den **Grenzwertsätzen**:

1) Wir wissen bereits, dass $\frac{1}{n} \to 0$ gilt. Deshalb gilt auch: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$

2) Da 0,42 betragsmäßig kleiner als 1 ist, gilt $0{,}42^n \to 0$.

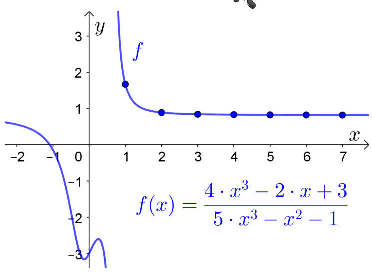
3) Wir setzen diese Bausteine zusammen: $\sqrt{16 - \frac{1}{n^2} + 0{,}42^n} \to \sqrt{16 - 0 + 0} = \sqrt{16} = 4$

Grenzwertsätze

Ermittle den Grenzwert der Folge für $n \to \infty$.

a) $a_n = \left(5 + \frac{3}{n}\right)^2 = \left(5 + 3 \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \to (5 + 3 \cdot 0)^2 = 25$

b) $b_n = 4 \cdot \cos\left(\frac{3}{n}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 4 \cdot \cos(0) - 2 \cdot \sin(0) = 4$



c) $c_n = \dfrac{4 \cdot n^3 - 2 \cdot n + 3}{5 \cdot n^3 - n^2 - 1} = \dfrac{\cancel{n^3} \cdot \left(4 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{\cancel{n^3} \cdot \left(5 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} \to \dfrac{4 - 0 + 0}{5 - 0 - 0} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Hinweis: Hebe im Zähler und im Nenner jeweils n^3 heraus und kürze.

d) $d_n = \dfrac{-3 \cdot n^2 + 5}{2 \cdot n^3 + n^2 - 3} = \dfrac{n^2 \cdot \left(-3 + \frac{5}{n^2}\right)}{n^3 \cdot \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{-3 + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}} \to 0 \cdot \dfrac{-3 + 0}{2 + 0 - 0} = 0 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$

Hinweis: Hebe im Zähler n^2 und im Nenner n^3 heraus und kürze.

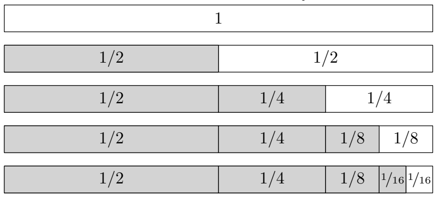
Ein Meter bleibt ein Meter.

Wir nehmen einen Papierstreifen mit 1 Meter Länge.

Wir teilen ihn genau in der Mitte.

Dann nehmen wir eine Hälfte und teilen sie wieder in der Mitte.

Und so machen wir immer weiter.



Die Gesamtlänge dieser potentiell unendlich vielen Papierschnitzel verändert sich dabei *nicht*.

Intuitiv gilt deshalb: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots=1$

Unendliche geometrische Reihe

Erinnere dich an die Summenformel, die für jede geometrische Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit Quotient q gilt:

$$\boldsymbol{s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Wenn $|q| < 1$ gilt, dann können wir die Summe aller unendlich vielen Folgenglieder berechnen:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \frac{b_1}{1-q}}$$

$b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \to b_1 \cdot \frac{0-1}{q-1} = \frac{b_1}{1-q}$

Unendliche geometrische Reihe

Ermittle den Quotienten q der gegebenen geometrischen Folge.
Berechne damit die Summe *aller* unendlich vielen Folgenglieder.

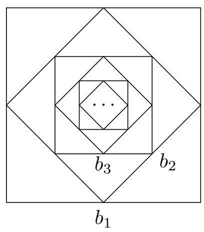
a) $(a_n) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots\right) \implies q = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

b) $(b_n) = (25; 20; 16; \dots) \implies q = 0{,}8 \implies 25 + 20 + 16 + \cdots = \frac{25}{1-0{,}8} = 125$

c) $(c_n) = (100; -10; 1; -0{,}1; \dots) \implies q = -0{,}1 \implies 100 - 10 + 1 - 0{,}1 + \cdots = \frac{100}{1-(-0{,}1)} = 90{,}\overline{90}$

Selbstähnlichkeit

Wir teilen jede Seite von einem Quadrat mit Seitenlänge b_1 in der Hälfte.
Dann schreiben wir dem Quadrat ein weiteres Quadrat mit Seitenlänge b_2 ein.
Dem neuen Quadrat schreiben wir genauso ein Quadrat mit Seitenlänge b_3 ein, usw.
Ist der ursprüngliche Umfang $u = 4 \cdot b_1$ länger oder $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$?



$$b_2 = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{b_1^2}{4}} = \sqrt{b_1^2 \cdot \frac{1}{2}} = b_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Allgemein gilt: $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Die Folge der Seitenlängen (b_n) ist also eine geometrische Folge mit Quotient $q = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\ldots$.

$$\implies b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \frac{b_1}{1-q} = 3{,}4142\ldots \cdot b_1 < 4 \cdot b_1$$

Der ursprüngliche Umfang $u = 4 \cdot b_1$ ist also länger als $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$.