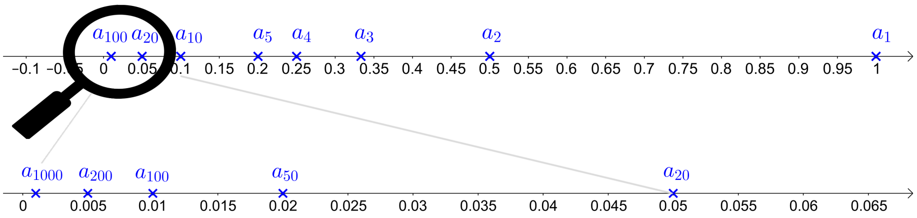
Harmonische Folge

Wir nehmen die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ genauer unter die Lupe: $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$



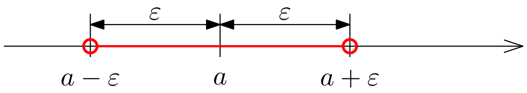
Die Folge (a_n) hat vermutlich den *Grenzwert* $a = 0$. Aber was heißt das genau?

ε-Umgebung

Wir wählen eine Zahl a auf der Zahlengerade und eine positive Zahl ε.

Wir denken bei ε an eine kleine Zahl, zum Beispiel $\varepsilon = 0{,}1$.

Die **ε-Umgebung von a** besteht aus allen Zahlen, deren Abstand von a kleiner als ε ist.

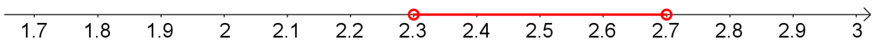


Die ε-Umgebung von a ist also genau das Intervall $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$.

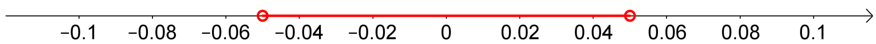
ε-Umgebung

Zeichne die angegebene ε-Umgebung von a auf der Zahlengerade ein.

a) $a = 2{,}5,\ \varepsilon = 0{,}2$



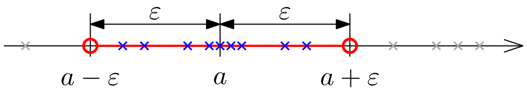
b) $a = 0,\ \varepsilon = 0{,}05$



Grenzwert

Wenn wir sagen, dass eine Folge (a_n) den Grenzwert a hat, meinen wir damit ganz genau das Folgende:

„*Zu jeder ε-Umgebung von a gibt es ein Folgenglied, ab dem alle Glieder in dieser Umgebung liegen.*"



Das muss für jede noch so kleine positive Zahl ε gelten.

Wir sagen auch: „*Fast alle* Glieder liegen in der ε-Umgebung."

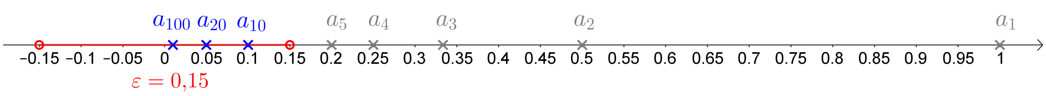
Mit *fast allen* Gliedern meinen wir alle bis auf endlich viele.

Wir schreiben dann $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$ oder kürzer $\boldsymbol{a_n \to a}$.

„limit" ist englisch für Grenze.

Harmonische Folge – Grenzwert

Die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ hat den Grenzwert $a = 0$.



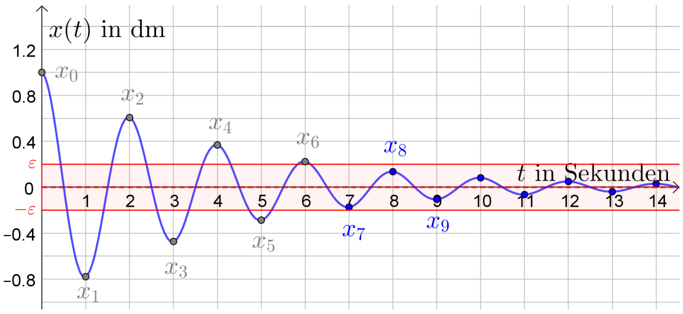
Wenn $\varepsilon = 0{,}15$ ist, dann liegen ab dem 7. Folgenglied *alle* Folgenglieder in der ε-Umgebung von 0.

Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$:

Wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, dann gilt $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, also liegt a_n in der ε-Umgebung von 0.

Gedämpfte Schwingung – Grenzwert

Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n = e^{-0{,}25\cdot n}\cdot\cos(\pi\cdot n)$ hat den Grenzwert $x = 0$.



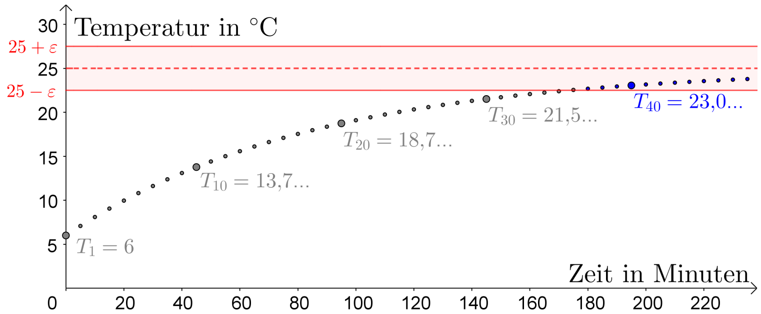
Wenn $\varepsilon = 0{,}2$ ist, dann ist $x_6 = 0{,}22\ldots$ noch *nicht* in der ε-Umgebung von 0.

Wenn $\varepsilon = 0{,}2$ ist, dann ist $x_7 = -0{,}17\ldots$ in der ε-Umgebung von 0.

Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$:
Wenn $n > \frac{\ln(\varepsilon)}{-0{,}25}$ ist, dann gilt $|x_n| < \varepsilon$.

Beschränktes Wachstum – Grenzwert

Die Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ mit $T_n = 25 - 19\cdot e^{-0{,}0584\cdot(n-1)}$ hat den Grenzwert $T = 25$.



Im Bild links ist die ε-Umgebung von 25 mit $\varepsilon = 2{,}5$ eingezeichnet.

Erinnere dich, dass für alle Zahlen $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^x > 0$$

Deshalb gilt $T_n < 25$ für alle n.

Wie groß muss n sein, damit $T_n > 22{,}5$ gilt?

$$25 - 19\cdot e^{-0{,}0584\cdot(n-1)} > 22{,}5 \iff$$
$$2{,}5 > 19\cdot e^{-0{,}0584\cdot(n-1)} \iff$$
$$\frac{2{,}5}{19} > e^{-0{,}0584\cdot(n-1)} \iff$$
$$\underbrace{\ln\left(\frac{2{,}5}{19}\right)}_{=-2{,}028\ldots} > -0{,}0584\cdot(n-1) \iff \quad \text{Division durch negative Zahl}$$
$$\frac{-2{,}028\ldots}{-0{,}0584} < n - 1 \iff$$
$$35{,}7\ldots < n$$

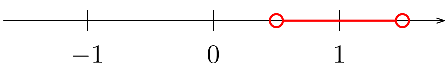
Ab dem 36. Folgenglied liegen also *alle* Folgenglieder in dieser ε-Umgebung.

Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$: Wenn $n > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{19}\right)}{-0{,}0584} + 1$ ist, dann liegt T_n in der ε-Umgebung von 25.

Folge ohne Grenzwert

Die Folge $(b_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ hat gar *keinen* Grenzwert.

Erkläre, warum 1 *sicher nicht* der Grenzwert von (b_n) ist.

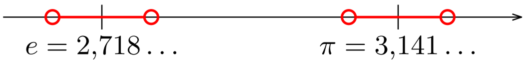


$]0{,}5; 1{,}5[$ ist die ε-Umgebung von 1 mit $\varepsilon = 0{,}5$.
Es liegen unendlich viele Glieder außerhalb dieser ε-Umgebung.

1 ist aber ein sogenannter **Häufungspunkt** der Folge, denn jede ε-Umgebung von 1 enthält unendlich viele Glieder. Ebenso -1.

Es kann nur einen geben.

Eine bestimmte Folge (a_n) hat einen Grenzwert. Emil behauptet, der Grenzwert ist $e = 2{,}7182....$ Pia ist sicher, dass $\pi = 3{,}1415...$ der Grenzwert ist. Können Emil und Pia beide Recht haben?



Wenn Emil Recht hat, dann müssen fast alle Glieder in $]3{,}0415...; 3{,}2415...[$ liegen. $(\varepsilon = 0{,}1)$
Wenn Pia Recht hat, dann müssen fast alle Glieder in $]2{,}6182...; 2{,}8182...[$ liegen. $(\varepsilon = 0{,}1)$
Also können nicht beide Recht haben.

Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, dann muss dieser Grenzwert also *eindeutig* sein.

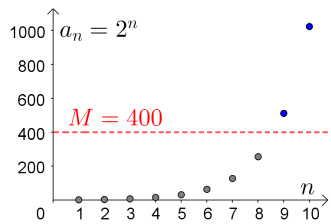
Grenzwert ∞

Mit der Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{oder kurz} \quad a_n \to \infty$$

meinen wir, dass es zu jeder noch so großen Zahl M ein Folgenglied gibt, ab dem *alle* Folgenglieder größer als M sind.

Zum Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$



Rechnen mit ∞

Für die Folgen (u_n) bzw. (p_n) gilt: $u_n \to \infty$ bzw. $p_n \to p > 0$
Trage den Grenzwert der jeweils zusammengesetzten Folge in das Kästchen ein:

i) $p_n \cdot u_n \to \infty$ **ii)** $-p_n \cdot u_n \to -\infty$ **iii)** $p_n + u_n \to \infty$ **iv)** $-p_n + u_n \to \infty$

Rationale Funktion

Hinter der Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^2 - 2\cdot n - 10}{0{,}007\cdot n + 0{,}06}$ steckt eine sogenannte **rationale Funktion**.

Rationale Funktion = $\dfrac{\text{Polynomfunktion}}{\text{Polynomfunktion}}$

1) Ermittle den Grenzwert von (a_n).
Hinweis: Hebe im Zähler n^2 und im Nenner n heraus und kürze.

$$a_n = \frac{n^2 - 2\cdot n - 10}{0{,}007\cdot n + 0{,}06} = \frac{n^2\cdot(1 - \frac{2}{n} - \frac{10}{n^2})}{n\cdot(0{,}007 + \frac{0{,}06}{n})} = n\cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{2}{n} - \frac{10}{n^2}}{0{,}007 + \frac{0{,}06}{n}}}_{\to \frac{1}{0{,}007}} \to \infty$$

2) Ab welchem Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 1000?

$$a_n > 1000 \iff n^2 - 2\cdot n - 10 > 7\cdot n + 60 \iff n^2 - 9\cdot n - 70 > 0$$

Der Funktionsgraph von $n \mapsto n^2 - 9\cdot n - 70$ ist eine nach oben offene Parabel.
Wir berechnen ihre Nullstellen:

$$\underbrace{n^2 - 9\cdot n - 70}_{=(n+5)\cdot(n-14)} = 0 \iff n = -5 \quad \text{oder} \quad n = 14$$

Ab dem 15. Folgenglied sind also alle Folgenglieder größer als 1000.

$0 \cdot \infty = ?$

Antonia möchte wissen: „*Wenn* $2 \cdot \infty = \infty$ *und* $-2 \cdot \infty = -\infty$ *ist, was ist dann* $0 \cdot \infty$*?*“
Mile meint: „*Wir wissen doch schon seit Langem, dass* 0 *mal einer Zahl immer* 0 *ergibt.*“
Tatsächlich ist aber bei Ausdrücken der Form „$0 \cdot \infty$“ *jedes* Ergebnis möglich:

a) $\underbrace{\frac{42}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{n}_{\to\infty} = 42$ **b)** $\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{n}_{\to\infty} = \frac{1}{n} \to 0$ **c)** $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\to\infty} = n \to \infty$ **d)** $\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\to\infty} = -n \to -\infty$

Unbestimmte Ausdrücke

Ausdrücke der Form

i) $\mathbf{0 \cdot \infty}$ **ii)** $\mathbf{0 \cdot (-\infty)}$ **iii)** $\mathbf{\frac{0}{0}}$ **iv)** $\mathbf{\frac{\infty}{0}}$ **v)** $\mathbf{\frac{-\infty}{0}}$ **vi)** $\mathbf{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ **vii)** $\mathbf{\infty - \infty}$

nennen wir auch **unbestimmte Ausdrücke**.

Behauptest du zum Beispiel ein stets richtiges Ergebnis für $0 \cdot \infty$ zu kennen, dann zeige ich dir oben ein Gegenbeispiel.

Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{0}$ gehen betragsmäßig gegen ∞. Ob der Grenzwert **i)** ∞ oder **ii)** $-\infty$ ist oder ob er **iii)** gar nicht existiert, hängt von der Nullfolge im Nenner ab. Zum Beispiel: **i)** $a_n = \frac{1}{n}$ **ii)** $b_n = -\frac{1}{n}$ **iii)** $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Beschränktheit

Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ heißt **beschränkt**, wenn es Zahlen a und b gibt mit $\boldsymbol{a \leq x_n \leq b}$ für alle $n \geq 1$.
Ihre Folgenglieder liegen dann also *alle* im Intervall $[a; b]$.
Die Zahl $\boldsymbol{a}$ nennen wir eine **untere Schranke** und die Zahl $\boldsymbol{b}$ eine **obere Schranke** der Folge.

Beschränktheit

Ist die Folge beschränkt? Falls ja, gib eine untere Schranke und eine obere Schranke an.

a) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ Beschränkt: $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

b) (b_n) mit $b_n = \sin(n)$ Beschränkt: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

c) (c_n) mit $c_n = 2^n$ Unbeschränkt: $2^n \to \infty$

d) (d_n) mit $d_n = (-0{,}99)^n$ Beschränkt: $-1 \leq (-0{,}99)^n \leq 1$

e) (e_n) mit $e_n = 5 \cdot \cos(n)$ Beschränkt: $-5 \leq 5 \cdot \cos(n) \leq 5$

f) (f_n) mit $f_n = -42 \cdot n$ Unbeschränkt: $-42 \cdot n \to -\infty$

g) (g_n) mit $g_n = (-3)^n$ Unbeschränkt: $(-3)^n$ hat weder obere noch untere Schranken.

Monotoniekriterium

Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt.
Dann hat die Folge (a_n) einen Grenzwert, nämlich die *kleinste obere Schranke* der Folge. **„Supremum“**

Die Folge (b_n) ist monoton fallend und beschränkt.
Dann hat die Folge (b_n) einen Grenzwert, nämlich die *größte untere Schranke* der Folge. **„Infimum“**