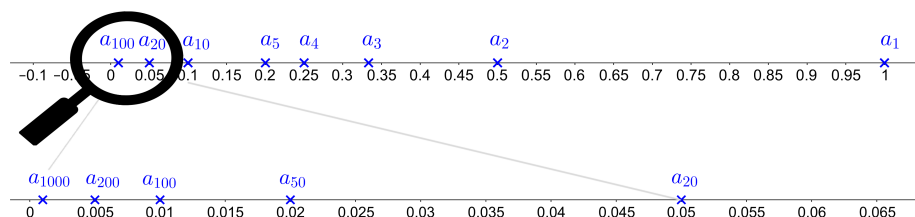




Wir nehmen die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ genauer unter die Lupe: $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$



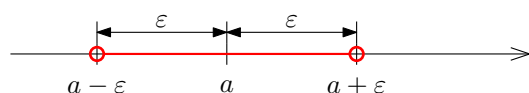
Die Folge (a_n) hat vermutlich den Grenzwert $a =$. Aber was heißt das genau?



Wir wählen eine Zahl a auf der Zahlengerade und eine positive Zahl ε .

Wir denken bei ε an eine kleine Zahl, zum Beispiel $\varepsilon = 0,1$.

Die ε -Umgebung von a besteht aus allen Zahlen, deren Abstand von a kleiner als ε ist.

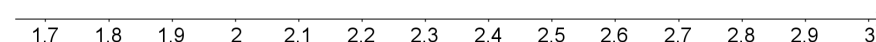


Die ε -Umgebung von a ist also genau das Intervall .

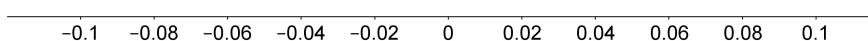


Zeichne die angegebene ε -Umgebung von a auf der Zahlengerade ein.

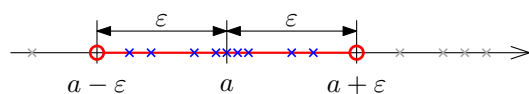
a) $a = 2,5$, $\varepsilon = 0,2$



b) $a = 0$, $\varepsilon = 0,05$



Wenn wir sagen, dass eine Folge (a_n) den Grenzwert a hat, meinen wir damit ganz genau das Folgende:
„Zu jeder ε -Umgebung von a gibt es ein Folgenglied, ab dem alle Glieder in dieser Umgebung liegen.“



Das muss für jede noch so kleine positive Zahl ε gelten.

Wir sagen auch: „Fast alle Glieder liegen in der ε -Umgebung.“

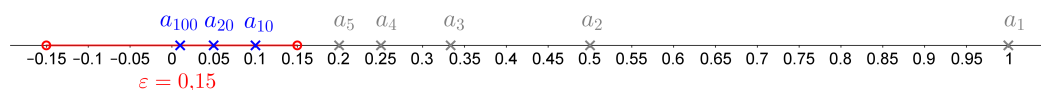
Mit *fast allen* Gliedern meinen wir alle bis auf endlich viele.

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder kürzer $a_n \rightarrow a$.

„limit“ ist englisch für Grenze.



Die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ hat den Grenzwert $a = 0$.



Wenn $\varepsilon = 0,15$ ist, dann liegen ab dem Folgenglied *alle* Folgenglieder in der ε -Umgebung von 0.

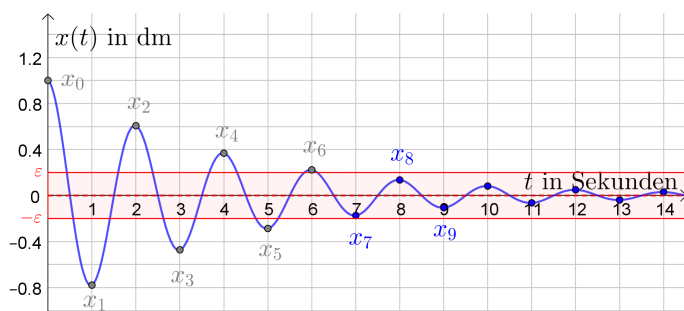
Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$:

Wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, dann gilt $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, also liegt a_n in der ε -Umgebung von 0.

Gedämpfte Schwingung – Grenzwert



Die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_n = e^{-0,25 \cdot n} \cdot \cos(\pi \cdot n)$ hat den Grenzwert $x = 0$.



Wenn $\varepsilon = 0,2$ ist, dann ist $x_6 =$

noch *nicht* in der ε -Umgebung von 0.

Wenn $\varepsilon = 0,2$ ist, dann ist $x_7 =$

in der ε -Umgebung von 0.

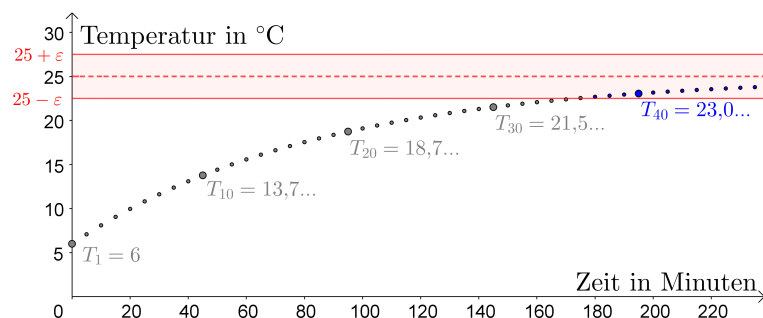
Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$:

Wenn $n > \frac{\ln(\varepsilon)}{-0,25}$ ist, dann gilt $|x_n| < \varepsilon$.

Beschränktes Wachstum – Grenzwert



Die Folge $(T_n)_{n \geq 1}$ mit $T_n = 25 - 19 \cdot e^{-0,0584 \cdot (n-1)}$ hat den Grenzwert $T = 25$.



Im Bild links ist die ε -Umgebung von 25 mit $\varepsilon = 2,5$ eingezeichnet.

Erinnere dich, dass für alle Zahlen $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^x > 0$$

Deshalb gilt $T_n < 25$ für alle n .

Wie groß muss n sein, damit $T_n > 22,5$ gilt?

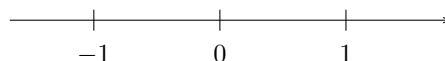
Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$: Wenn $n > \frac{\ln(\frac{\varepsilon}{19})}{-0,0584} + 1$ ist, dann liegt T_n in der ε -Umgebung von 25.

Folge ohne Grenzwert



Die Folge $(b_n)_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ hat gar *keinen* Grenzwert.

Erkläre, warum 1 *sicher nicht* der Grenzwert von (b_n) ist.



1 ist aber ein sogenannter **Häufungspunkt** der Folge, denn jede ε -Umgebung von 1 enthält unendlich viele Glieder. Ebenso -1 .

Es kann nur einen geben.



Eine bestimmte Folge (a_n) hat einen Grenzwert. Emil behauptet, der Grenzwert ist $e = 2,7182\dots$. Pia ist sicher, dass $\pi = 3,1415\dots$ der Grenzwert ist. Können Emil und Pia beide Recht haben?



Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, dann muss dieser Grenzwert also *eindeutig* sein.

Grenzwert ∞ 

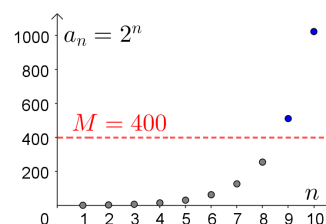
MmF

Mit der Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{oder kurz} \quad a_n \rightarrow \infty$$

meinen wir, dass es zu jeder noch so großen Zahl M ein Folgenglied gibt, ab dem *alle* Folgenglieder größer als M sind.

Zum Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$

Rechnen mit ∞ 

MmF

Für die Folgen (u_n) bzw. (p_n) gilt: $u_n \rightarrow \infty$ bzw. $p_n \rightarrow p > 0$

Trage den Grenzwert der jeweils zusammengesetzten Folge in das Kästchen ein:

i) $p_n \cdot u_n \rightarrow$

ii) $-p_n \cdot u_n \rightarrow$

iii) $p_n + u_n \rightarrow$

iv) $-p_n + u_n \rightarrow$

Rationale Funktion



MmF

Hinter der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n^2 - 2 \cdot n - 10}{0,007 \cdot n + 0,06}$ steckt eine sogenannte **rationale Funktion**.

1) Ermittle den Grenzwert von (a_n) .

Rationale Funktion = $\frac{\text{Polynomfunktion}}{\text{Polynomfunktion}}$

Hinweis: Hebe im Zähler n^2 und im Nenner n heraus und kürze.

2) Ab welchem Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 1000?

$0 \cdot \infty = ?$



Antonia möchte wissen: „Wenn $2 \cdot \infty = \infty$ und $-2 \cdot \infty = -\infty$ ist, was ist dann $0 \cdot \infty$?“

Mile meint: „Wir wissen doch schon seit Langem, dass 0 mal einer Zahl immer 0 ergibt.“

Tatsächlich ist aber bei Ausdrücken der Form „ $0 \cdot \infty$ “ jedes Ergebnis möglich:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \underbrace{\frac{42}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n}_{\rightarrow \infty} = 42 & \text{b) } \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n}_{\rightarrow \infty} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 & \text{c) } \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\rightarrow \infty} = n \rightarrow \infty & \text{d) } \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\rightarrow \infty} = -n \rightarrow -\infty \end{array}$$

Unbestimmte Ausdrücke



Ausdrücke der Form

$$\text{i) } 0 \cdot \infty \quad \text{ii) } 0 \cdot (-\infty) \quad \text{iii) } \frac{0}{0} \quad \text{iv) } \frac{\infty}{0} \quad \text{v) } \frac{-\infty}{0} \quad \text{vi) } \frac{\pm \infty}{\pm \infty} \quad \text{vii) } \infty - \infty$$

nennen wir auch **unbestimmte Ausdrücke**.

Behauptest du zum Beispiel ein stets richtiges Ergebnis für $0 \cdot \infty$ zu kennen, dann zeige ich dir oben ein Gegenbeispiel.

Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{0}$ gehen betragsmäßig gegen ∞ . Ob der Grenzwert **i)** ∞ oder **ii)** $-\infty$ ist oder ob er **iii)** gar nicht existiert, hängt von der Nullfolge im Nenner ab. Zum Beispiel: **i)** $a_n = \frac{1}{n}$ **ii)** $b_n = -\frac{1}{n}$ **iii)** $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Beschränktheit



Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ heißt **beschränkt**, wenn es Zahlen a und b gibt mit $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \geq 1$.

Ihre Folgenglieder liegen dann also *alle* im Intervall $[a; b]$.

Die Zahl a nennen wir eine **untere Schranke** und die Zahl b eine **obere Schranke** der Folge.

Beschränktheit



Ist die Folge beschränkt? Falls ja, gib eine untere Schranke und eine obere Schranke an.

- a) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$
- b) (b_n) mit $b_n = \sin(n)$
- c) (c_n) mit $c_n = 2^n$
- d) (d_n) mit $d_n = (-0,99)^n$
- e) (e_n) mit $e_n = 5 \cdot \cos(n)$
- f) (f_n) mit $f_n = -42 \cdot n$
- g) (g_n) mit $g_n = (-3)^n$

Monotoniekriterium



Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt.

Dann hat die Folge (a_n) einen Grenzwert, nämlich die *kleinste obere Schranke* der Folge. „Supremum“

Die Folge (b_n) ist monoton fallend und beschränkt.

Dann hat die Folge (b_n) einen Grenzwert, nämlich die *größte untere Schranke* der Folge. „Infimum“

