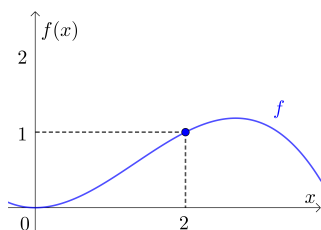
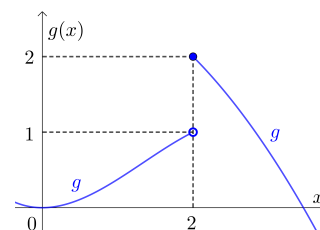


Stetigkeit: „Kleine Veränderungen in x -Richtung bewirken kleine Veränderungen in y -Richtung.“



Wie ändern sich links die Funktionswerte von f , wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?

Wie ändern sich rechts die Funktionswerte von g , wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?



Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = 2$.

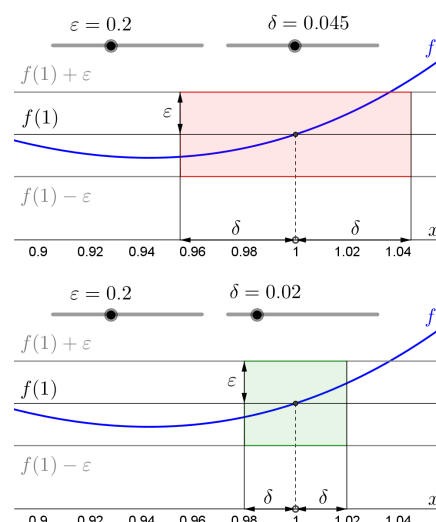
Die Funktion g ist **unstetig** an der Stelle $x = 2$.

Stetigkeit ist in der Mathematik exakt definiert:

Die rechts dargestellte Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

Das heißt, wir können stets das folgende Spiel gewinnen:

- 1) Unser Gegner legt eine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ fest.
In den Bildern rechts ist zum Beispiel $\varepsilon = 0,2$.
- 2) Danach wählen wir einen Spielraum $\delta > 0$.
Im Bild oben ist $\delta = 0,045$. Im Bild unten ist $\delta = 0,02$.
- 3) Die Fehlertoleranz ε und der Spielraum δ legen – wie rechts dargestellt – ein Rechteck mit Mittelpunkt $(1 | f(1))$, Breite $2 \cdot \delta$ und Höhe $2 \cdot \varepsilon$ fest.
- 4) Liegt an jeder Stelle x in $]1 - \delta; 1 + \delta[$ der zugehörige Funktionswert $f(x)$ in $]f(1) - \varepsilon; f(1) + \varepsilon[$, dann gewinnt unser Spielraum δ gegen die vorgegebene Fehlertoleranz ε .
In diesem Spiel gewinnt also $\delta = 0,02$ gegen $\varepsilon = 0,2$.



Wenn es an der Stelle x_0 zu jeder noch so kleinen positiven Fehlertoleranz ε einen passenden positiven Spielraum δ gibt, dann ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig.

Genau dann, wenn die Funktion f **stetig an der Stelle x_0** ist, schreiben wir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Wenn die Funktion f an jeder Stelle x_0 stetig ist, dann ist f eine **stetige Funktion**.

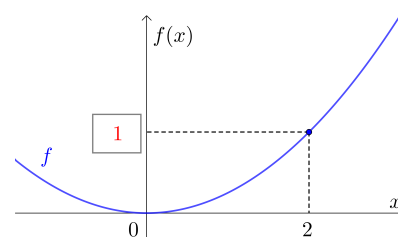
Der Ausdruck $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ist der sogenannte Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 . Beim Versuch, diesen Grenzwert zu ermitteln, können neben Stetigkeit – also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ – auch noch einige andere Fälle eintreten.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II](#).

Die rechts dargestellte Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$. Ermittle ihren Grenzwert an dieser Stelle:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

Trage rechts die richtige Zahl in das Kästchen ein.



Stückweise definierte Funktion

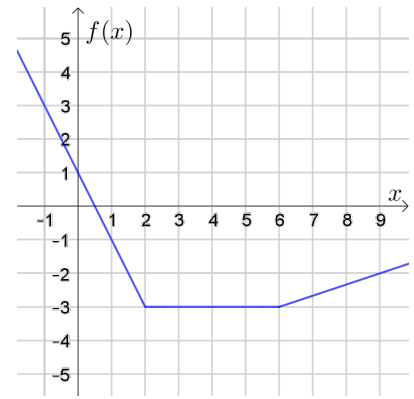


Für die Funktion f gilt: $f(x) = \begin{cases} -2 \cdot x + a, & \text{falls } x < 2, \\ -3, & \text{falls } 2 \leq x \leq 6, \\ \frac{1}{3} \cdot x + b, & \text{falls } x > 6. \end{cases}$

- a) Berechne die Zahlen a und b so, dass die Funktion f stetig ist.
b) Zeichne rechts den Funktionsgraphen ein.

$$f(2) = -3 \implies -4 + a = -3 \implies a = 1$$

$$f(6) = -3 \implies 2 + b = -3 \implies b = -5$$



Stetige Funktionen



Die **elementaren Funktionen** sind – überall dort, wo sie definiert sind – **stetig**. Dazu zählen:

- 1) **Polynomfunktionen**: $f(x) = 4 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x + 42$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- 2) **Potenzfunktionen**: $p(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 3) **Wurzelfunktionen**: $w(x) = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$
- 4) **Exponentialfunktionen**: $e(x) = 4^x$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- 5) **Logarithmusfunktionen**: $\ell(x) = \log_4(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$
- 6) **Winkelfunktionen**: $s(x) = \sin(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- 7) **Arkusfunktionen**: $a(x) = \arcsin(x)$ mit Definitionsmenge $D = [-1; 1]$

Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann sind auch ihre **Summe**, ihre **Differenz**, ihr **Produkt**, ihr **Quotient** und ihre **Verkettung** wieder im gesamten Definitionsbereich **stetig**.

Baukastenprinzip



Die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x}$ und g mit $g(x) = x - 1$ sind als elementare Funktionen stetig.

- a) Die Funktion s mit $s(x) = \sqrt{x} + x - 1$ ist als Summe stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion s ist für alle $x \geq 0$ definiert.
- b) Die Funktion d mit $d(x) = \sqrt{x} - x + 1$ ist als Differenz stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion d ist für alle $x \geq 0$ definiert.
- c) Die Funktion p mit $p(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ ist als Produkt stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion p ist für alle $x \geq 0$ definiert.
- d) Die Funktion q mit $q(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$ ist als Quotient stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion q ist für alle $x \geq 0$ außer $x = 1$ definiert.
- e) Die Funktion k mit $k(x) = \sqrt{x - 1}$ ist als Verkettung stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion k ist für alle $x \geq 1$ definiert.



Die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{x-4}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert außer für $x = 4$.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

- i) Wenn x „ein bisschen“ größer als 4 ist, dann ist $f(x)$ eine positive ~~negative~~ und betragsmäßig „sehr große“ ~~„sehr kleine“~~ Zahl.
- ii) Wenn x „ein bisschen“ kleiner als 4 ist, dann ist $f(x)$ eine ~~positive~~ negative und betragsmäßig „sehr große“ ~~„sehr kleine“~~ Zahl.

$$\frac{3}{0,000\ 01}$$

$$\frac{3}{-0,000\ 01}$$

Der Graph der Funktion f ist rechts dargestellt.

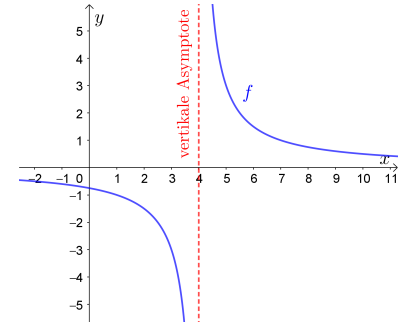
Die Stelle $x = 4$ nennt man eine **Polstelle** von f .

Die strichlierte senkrechte Gerade durch die Polstelle nennt man eine **vertikale Asymptote** von f .

Der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x = 4$ ist $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \infty$.

Der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x = 4$ ist $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = -\infty$.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II](#).



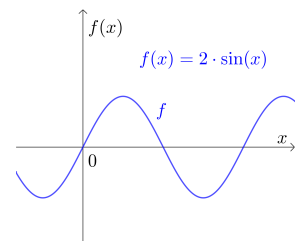
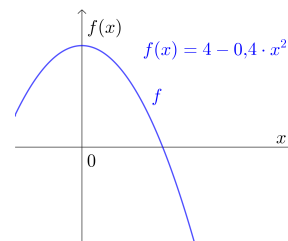
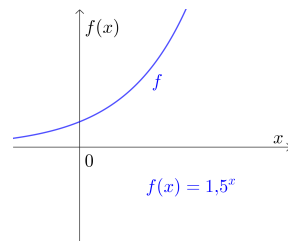
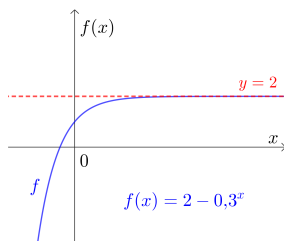
Asymptotisches Verhalten



Beim **asymptotischen Verhalten** einer Funktion f untersuchen wir ihre Funktionswerte $f(x)$, wenn x gegen unendlich geht ($x \rightarrow \infty$) bzw. x gegen minus unendlich geht ($x \rightarrow -\infty$).

Dabei tritt jeweils genau einer der 4 folgenden Fälle ein:

- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert nicht.
 Kurz: $f(x) \rightarrow c$ Kurz: $f(x) \rightarrow \infty$ Kurz: $f(x) \rightarrow -\infty$



Die Definition dieser Grenzwerte ist ähnlich zu der Definition des Grenzwerts von Folgen.

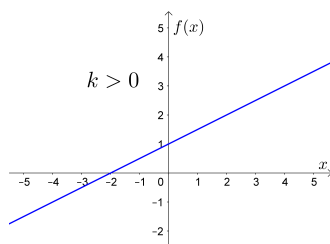
Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II](#).

Lineare Funktionen



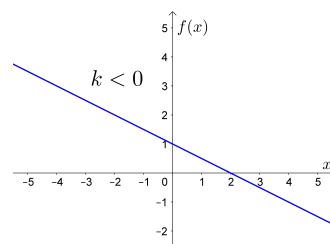
Lineare Funktionen: $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$

Die **Steigung** k bestimmt das asymptotische Verhalten von f .



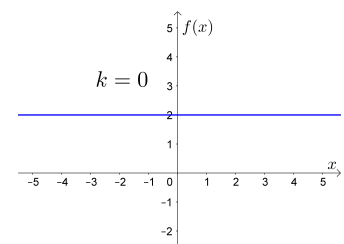
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = d$$

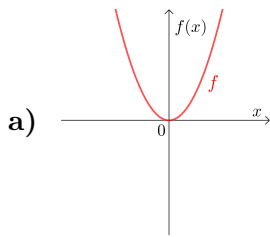
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$$

Potenzfunktionen: $f(x) = a \cdot x^m$ mit $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^*$

Das Verhalten an der Stelle $x = 0$ und das asymptotische Verhalten hängen von a und m ab.

[Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ?]

Ermittle jeweils das asymptotische Verhalten und skizziere den Funktionsgraphen.

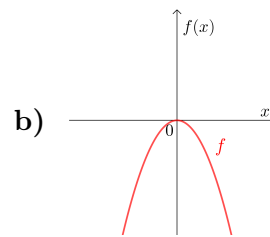


$$f(x) = x^2$$

$[m > 0, m \text{ gerade}, a > 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

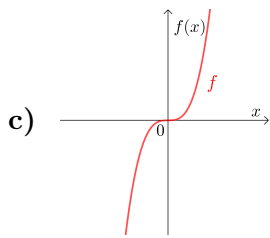


$$f(x) = -x^2$$

$[m > 0, m \text{ gerade}, a < 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

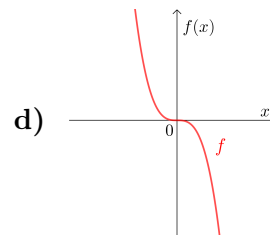


$$f(x) = x^3$$

$[m > 0, m \text{ ungerade}, a > 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

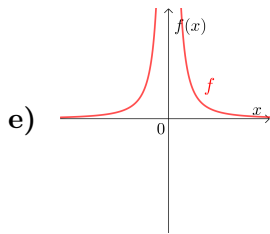


$$f(x) = -x^3$$

$[m > 0, m \text{ ungerade}, a < 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

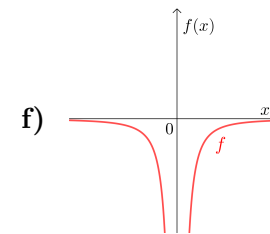


$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$[m < 0, m \text{ gerade}, a > 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

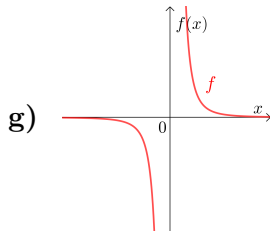


$$f(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$[m < 0, m \text{ gerade}, a < 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

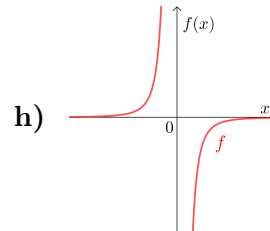


$$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$[m < 0, m \text{ ungerade}, a > 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$f(x) = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$$

$[m < 0, m \text{ ungerade}, a < 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

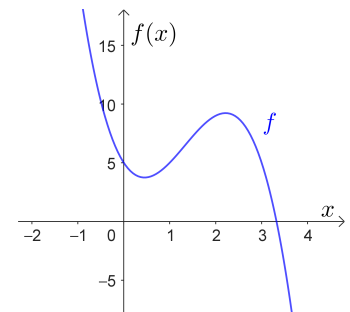
Um das asymptotische Verhalten von **Polynomfunktionen** zu begründen, heben wir heraus:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 5 = \\ &= -2 \cdot x^3 \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{5}{2 \cdot x^3}}_{\rightarrow 0} \right) \end{aligned}$$

Für diese Polynomfunktion f gilt also:

Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $f(x) \rightarrow -\infty$.

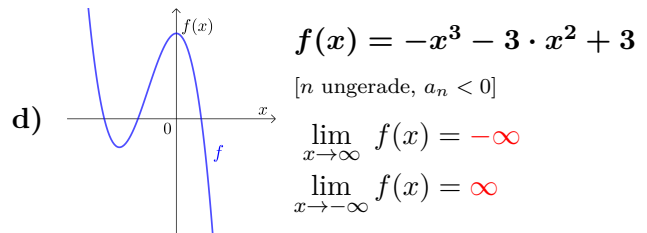
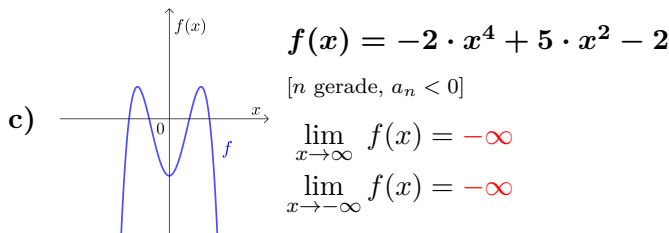
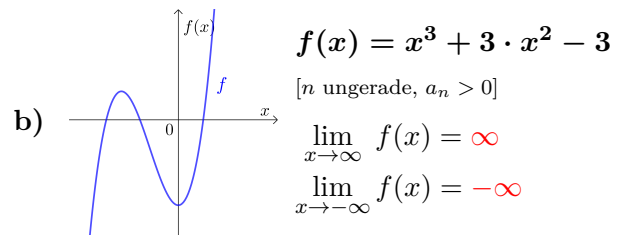
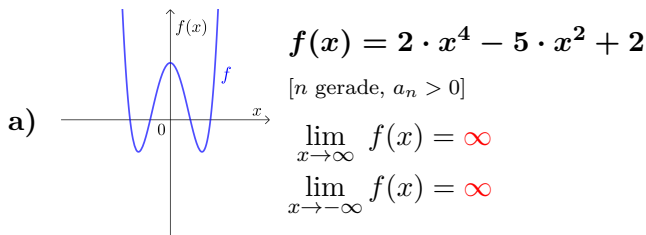
Wenn $x \rightarrow -\infty$, dann $f(x) \rightarrow \infty$.



Polynomfunktionen: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_n \neq 0$

Der Term $a_n \cdot x^n$ bestimmt das asymptotische Verhalten.

[Ist n gerade oder ungerade? Ist a_n positiv oder negativ?]



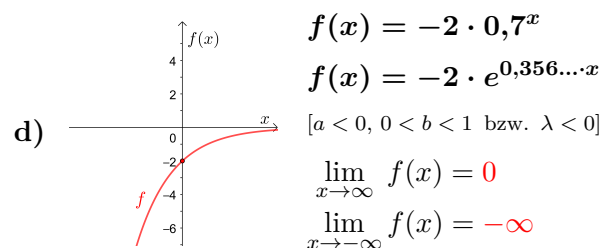
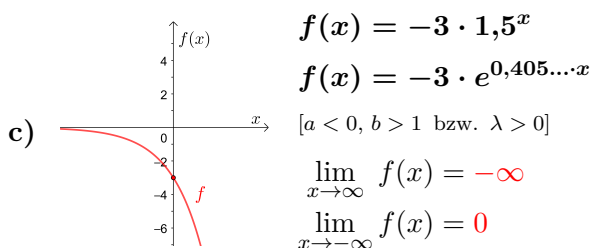
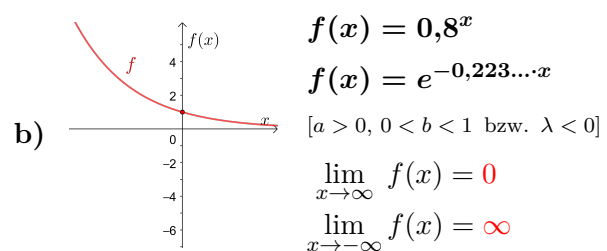
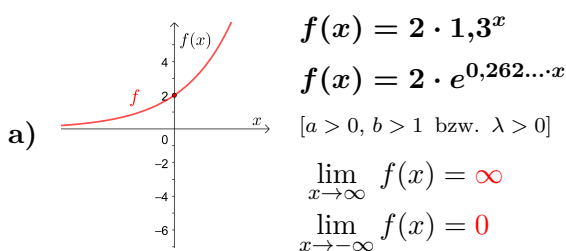
Exponentialfunktionen: $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$ bzw. $\lambda \neq 0$

- $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$: Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $b^x \rightarrow \infty$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \rightarrow \infty$.
- $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$: Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $b^x \rightarrow 0$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \rightarrow 0$.

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \lim_{x \rightarrow \infty} b^{-x}$ und $b^{-x} = \frac{1}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ sind für $x \rightarrow -\infty$ die beiden Fälle genau vertauscht:

- $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$: Wenn $x \rightarrow -\infty$, dann $b^x \rightarrow 0$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \rightarrow 0$.
- $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$: Wenn $x \rightarrow -\infty$, dann $b^x \rightarrow \infty$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \rightarrow \infty$.

Ermittle jeweils das asymptotische Verhalten und skizziere den Funktionsgraphen.



Summe von Funktionen



Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion s mit: $s(x) = f(x) + g(x)$

Wenn $f(x) \rightarrow a$ und $g(x) \rightarrow b$, dann gilt:

$$s(x) = f(x) + g(x) \rightarrow a + b$$

Wenn $f(x) \rightarrow a$ und $g(x) \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$s(x) = f(x) + g(x) \rightarrow \infty$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b \in \mathbb{R}$).

Bei $\infty - \infty$ sprechen wir von einem **unbestimmten Ausdruck**, weil das Ergebnis von f und g abhängt:

Wenn $f(x) = 4 \cdot x \rightarrow \infty$ und $g(x) = -2 \cdot x \rightarrow -\infty$, dann $s(x) = 4 \cdot x + (-2 \cdot x) = 2 \cdot x \rightarrow \infty$.

Wenn $f(x) = 2 \cdot x \rightarrow \infty$ und $g(x) = -4 \cdot x \rightarrow -\infty$, dann $s(x) = 2 \cdot x + (-4 \cdot x) = -2 \cdot x \rightarrow -\infty$.

+	b	∞	$-\infty$
a	$a + b$	∞	$-\infty$
∞	∞	∞	unbestimmt
$-\infty$	$-\infty$	unbestimmt	$-\infty$

Differenz von Funktionen



Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion d mit:

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b \in \mathbb{R}$).

-	b	∞	$-\infty$
a	$a - b$	$-\infty$	∞
∞	∞	unbestimmt	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	unbestimmt

Produkt von Funktionen



Aus den Funktionen f und g
bilden wir die Funktion p mit:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b > 0$).

$\cdot$	b	$-b$	0	∞	$-\infty$
a	$a \cdot b$	$-a \cdot b$	0	∞	$-\infty$
$-a$	$-a \cdot b$	$a \cdot b$	0	$-\infty$	∞
0	0	0	0	unbest.	unbest.
∞	∞	$-\infty$	unbest.	∞	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	∞	unbest.	$-\infty$	∞

Quotient von Funktionen



Aus den Funktionen f und g
bilden wir die Funktion q mit:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } g(x) \neq 0$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b > 0$).

/	b	$-b$	0	∞	$-\infty$
a	a/b	$-a/b$	unbest.	0	0
$-a$	$-a/b$	a/b	unbest.	0	0
0	0	0	unbest.	0	0
∞	∞	$-\infty$	unbest.	unbest.	unbest.
$-\infty$	$-\infty$	∞	unbest.	unbest.	unbest.

Verkettung von Funktionen



a) Wenn $t \rightarrow \infty$, dann $0,87^t \rightarrow 0$ und damit: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20}{4 + 2 \cdot 0,87^t} = \frac{20}{4 + 2 \cdot 0} = 5$

b) Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $x^2 - x \rightarrow \infty$ und damit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - x} = 0$

c) Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $-x^2 \rightarrow -\infty$ und damit: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$

