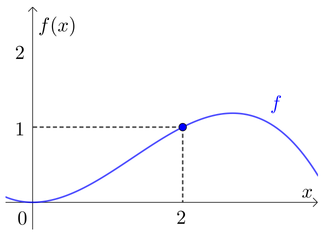
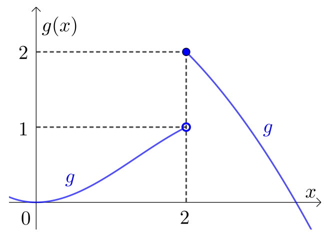
Grundvorstellung zur Stetigkeit

Stetigkeit: *„Kleine Veränderungen in x-Richtung bewirken kleine Veränderungen in y-Richtung.“*



Wie ändern sich links die Funktionswerte von f, wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?

Wie ändern sich rechts die Funktionswerte von g, wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?



Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = 2$. Die Funktion g ist **unstetig** an der Stelle $x = 2$.

Stetigkeit

Stetigkeit ist in der Mathematik exakt definiert:

Die rechts dargestellte Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

Das heißt, wir können stets das folgende Spiel gewinnen:

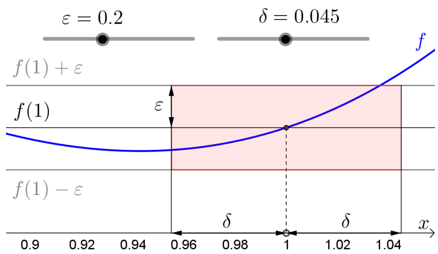
1) Unser Gegner legt eine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ fest. In den Bildern rechts ist zum Beispiel $\varepsilon = 0{,}2$.

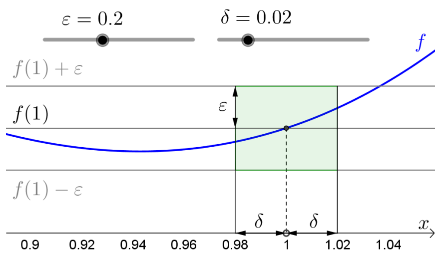
2) Danach wählen wir einen Spielraum $\delta > 0$. Im Bild oben ist $\delta = 0{,}045$. Im Bild unten ist $\delta = 0{,}02$.

3) Die Fehlertoleranz ε und der Spielraum δ legen – wie rechts dargestellt – ein Rechteck mit Mittelpunkt $(1 \mid f(1))$, Breite $2 \cdot \delta$ und Höhe $2 \cdot \varepsilon$ fest.

4) Liegt an jeder Stelle x in $]1-\delta; 1+\delta[$ der zugehörige Funktionswert $f(x)$ in $]f(1)-\varepsilon; f(1)+\varepsilon[$, dann gewinnt unser Spielraum δ gegen die vorgegebene Fehlertoleranz ε.

In diesem Spiel gewinnt also $\delta = 0{,}02$ gegen $\varepsilon = 0{,}2$.





Wenn es an der Stelle x_0 zu jeder noch so kleinen positiven Fehlertoleranz ε einen passenden positiven Spielraum δ gibt, dann ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig.

Stetigkeit

Genau dann, wenn die Funktion $\boldsymbol{f}$ **stetig an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$ ist, schreiben wir:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Wenn die Funktion f an jeder Stelle x_0 stetig ist, dann ist f eine **stetige Funktion**.

Der Ausdruck $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist der sogenannte Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0. Beim Versuch, diesen Grenzwert zu ermitteln, können neben Stetigkeit – also $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ – auch noch einige andere Fälle eintreten.

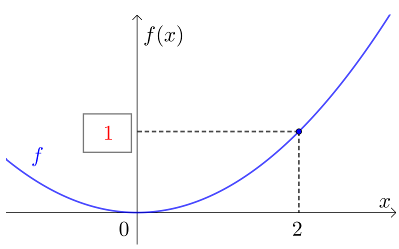
Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II.

Stetigkeit

Die rechts dargestellte Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$. Ermittle ihren Grenzwert an dieser Stelle:

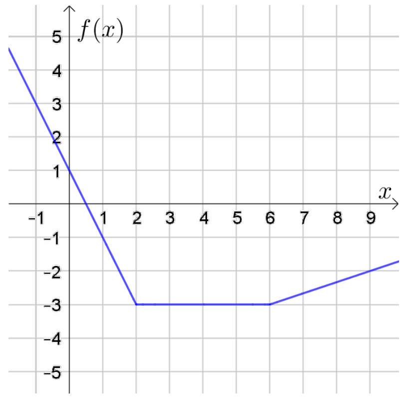
$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

Trage rechts die richtige Zahl in das Kästchen ein.



Stückweise definierte Funktion

Für die Funktion f gilt: $f(x) = \begin{cases} -2\cdot x + a, & \text{falls } x < 2, \\ -3, & \text{falls } 2 \le x \le 6, \\ \frac{1}{3}\cdot x + b, & \text{falls } x > 6\,. \end{cases}$



a) Berechne die Zahlen a und b so, dass die Funktion f stetig ist.

b) Zeichne rechts den Funktionsgraphen ein.

$f(2) = -3 \implies -4 + a = -3 \implies a = 1$

$f(6) = -3 \implies 2 + b = -3 \implies b = -5$

Stetige Funktionen

Die **elementaren Funktionen** sind – überall dort, wo sie definiert sind – **stetig**. Dazu zählen:

1) Polynomfunktionen: $f(x) = 4\cdot x^5 - 5\cdot x^3 + 2\cdot x + 42$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

2) Potenzfunktionen: $p(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

3) Wurzelfunktionen: $w(x) = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

4) Exponentialfunktionen: $e(x) = 4^x$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

5) Logarithmusfunktionen: $\ell(x) = \log_4(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

6) Winkelfunktionen: $s(x) = \sin(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

7) Arkusfunktionen: $a(x) = \arcsin(x)$ mit Definitionsmenge $D = [-1; 1]$

Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann sind auch ihre **Summe**, ihre **Differenz**, ihr **Produkt**, ihr **Quotient** und ihre **Verkettung** wieder im gesamten Definitionsbereich **stetig**.

Baukastenprinzip

Die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x}$ und g mit $g(x) = x - 1$ sind als elementare Funktionen stetig.

a) Die Funktion s mit $s(x) = \sqrt{x} + x - 1$ ist als Summe stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion s ist für alle $x \ge 0$ definiert.

b) Die Funktion d mit $d(x) = \sqrt{x} - x + 1$ ist als Differenz stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion d ist für alle $x \ge 0$ definiert.

c) Die Funktion p mit $p(x) = \sqrt{x}\cdot(x-1)$ ist als Produkt stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion p ist für alle $x \ge 0$ definiert.

d) Die Funktion q mit $q(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ ist als Quotient stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion q ist für alle $x \ge 0$ außer $x = 1$ definiert.

e) Die Funktion k mit $k(x) = \sqrt{x-1}$ ist als Verkettung stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion k ist für alle $x \ge 1$ definiert.

Polstelle

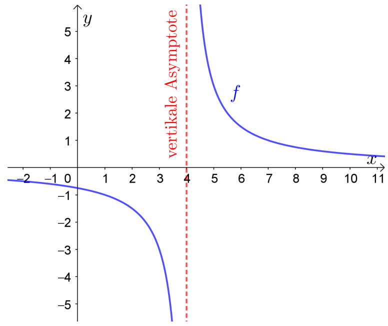
Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert außer für $x = 4$.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

i) Wenn x „ein bisschen" größer als 4 ist, dann ist $f(x)$ eine positive ~~/ negative~~ und betragsmäßig „sehr große" ~~/ „sehr kleine"~~ Zahl. $\frac{3}{0{,}000\,01}$

ii) Wenn x „ein bisschen" kleiner als 4 ist, dann ist $f(x)$ eine ~~positive /~~ negative und betragsmäßig „sehr große" ~~/ „sehr kleine"~~ Zahl. $\frac{3}{-0{,}000\,01}$

Der Graph der Funktion f ist rechts dargestellt.
Die Stelle $x = 4$ nennt man eine **Polstelle** von f.
Die strichlierte senkrechte Gerade durch die Polstelle nennt man eine **vertikale Asymptote** von f.



Der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x = 4$ ist $\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = \infty$.
Der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x = 4$ ist $\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = -\infty$.
Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II.

Asymptotisches Verhalten

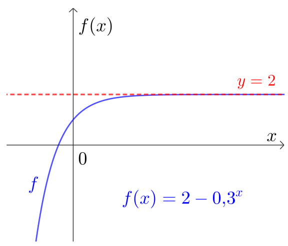
Beim **asymptotischen Verhalten** einer Funktion f untersuchen wir ihre Funktionswerte $f(x)$, wenn x gegen unendlich geht ($x \to \infty$) bzw. x gegen minus unendlich geht ($x \to -\infty$).
Dabei tritt jeweils genau einer der 4 folgenden Fälle ein:

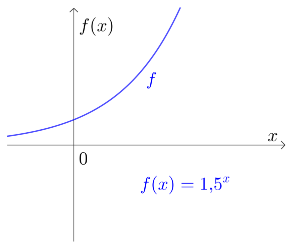
i) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c}$ Kurz: $\boldsymbol{f(x) \to c}$

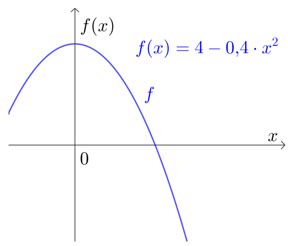
ii) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty}$ Kurz: $\boldsymbol{f(x) \to \infty}$

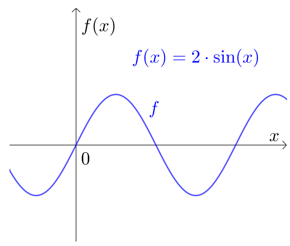
iii) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty}$ Kurz: $\boldsymbol{f(x) \to -\infty}$

iv) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}$ existiert *nicht*.







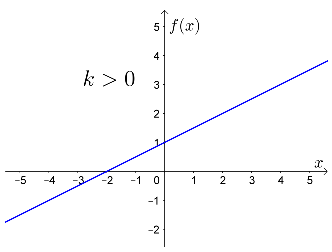


Die Definition dieser Grenzwerte ist ähnlich zu der Definition des Grenzwerts von Folgen.
Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II.

Lineare Funktionen

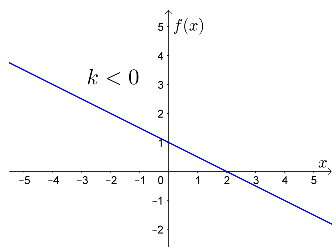
Lineare Funktionen: $\boldsymbol{f(x) = k \cdot x + d}$ mit $k,\, d \in \mathbb{R}$

Die Steigung k bestimmt das asymptotische Verhalten von f.



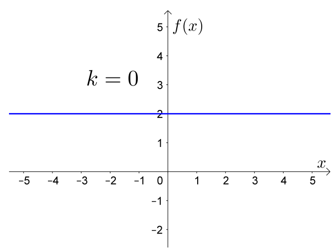
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = d$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = d$

Potenzfunktionen MmF

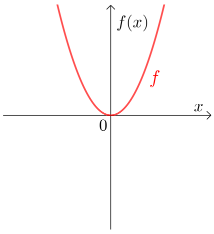
Potenzfunktionen: $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^m}$ mit $a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}^*$

Das Verhalten an der Stelle $x = 0$ und das asymptotische Verhalten hängen von a und m ab.

[Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ?]

Ermittle jeweils das asymptotische Verhalten und skizziere den Funktionsgraphen.

a)



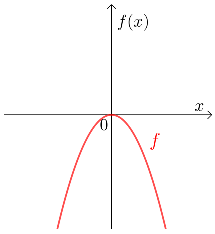
$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

[$m > 0$, m gerade, $a > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b)



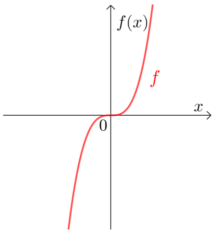
$\boldsymbol{f(x) = -x^2}$

[$m > 0$, m gerade, $a < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c)



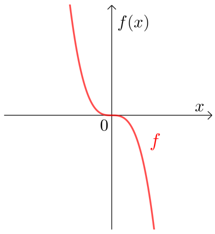
$\boldsymbol{f(x) = x^3}$

[$m > 0$, m ungerade, $a > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

d)



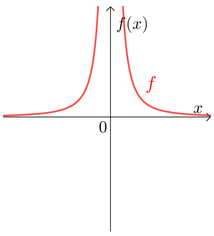
$\boldsymbol{f(x) = -x^3}$

[$m > 0$, m ungerade, $a < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

e)



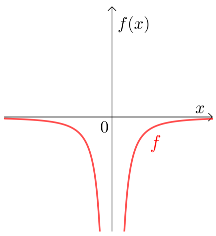
$\boldsymbol{f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}}$

[$m < 0$, m gerade, $a > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

f)



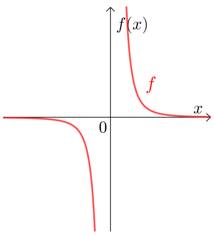
$\boldsymbol{f(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}}$

[$m < 0$, m gerade, $a < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

g)



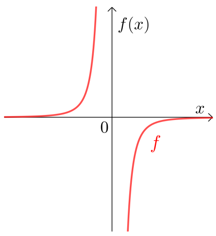
$\boldsymbol{f(x) = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}}$

[$m < 0$, m ungerade, $a > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

h)



$\boldsymbol{f(x) = -x^{-3} = -\dfrac{1}{x^3}}$

[$m < 0$, m ungerade, $a < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

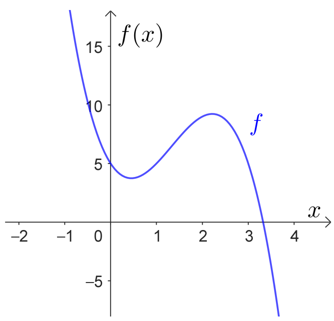
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Herausheben MmF

Um das asymptotische Verhalten von Polynomfunktionen zu begründen, heben wir heraus:

$$f(x) = -2 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 5 =$$

$$= -2 \cdot x^3 \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{5}{2 \cdot x^3}}_{\to 0} \right)$$



Für diese Polynomfunktion f gilt also:

Wenn $x \to \infty$, dann $f(x) \to -\infty$.

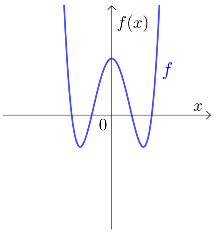
Wenn $x \to -\infty$, dann $f(x) \to \infty$.

Polynomfunktionen MmF

Polynomfunktionen: $\boldsymbol{f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0}$ mit $a_n \neq 0$

Der Term $a_n \cdot x^n$ bestimmt das asymptotische Verhalten.

[Ist n gerade oder ungerade? Ist a_n positiv oder negativ?]

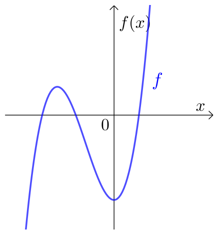
a) 

$\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^2 + 2}$

[n gerade, $a_n > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

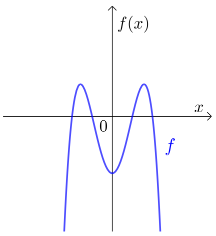
b) 

$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 3}$

[n ungerade, $a_n > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

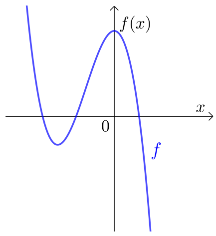
c) 

$\boldsymbol{f(x) = -2 \cdot x^4 + 5 \cdot x^2 - 2}$

[n gerade, $a_n < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

d) 

$\boldsymbol{f(x) = -x^3 - 3 \cdot x^2 + 3}$

[n ungerade, $a_n < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Exponentialfunktionen MmF

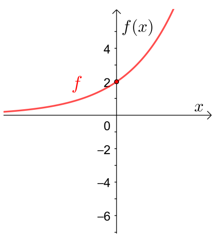
Exponentialfunktionen: $\boldsymbol{f(x) = a \cdot b^x}$ bzw. $\boldsymbol{f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}}$ mit $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ bzw. $\lambda \neq 0$

- $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$: Wenn $x \to \infty$, dann $b^x \to \infty$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \to \infty$.
- $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$: Wenn $x \to \infty$, dann $b^x \to 0$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \to 0$.

Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = \lim\limits_{x\to\infty} b^{-x}$ und $b^{-x} = \frac{1}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ sind für $x \to -\infty$ die beiden Fälle genau vertauscht:

- $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$: Wenn $x \to -\infty$, dann $b^x \to 0$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \to 0$.
- $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$: Wenn $x \to -\infty$, dann $b^x \to \infty$ bzw. $e^{\lambda \cdot x} \to \infty$.

Ermittle jeweils das asymptotische Verhalten und skizziere den Funktionsgraphen.

a) 

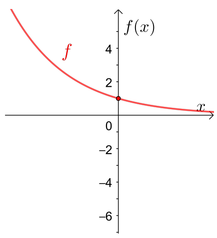
$\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot 1{,}3^x}$

$\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot e^{0{,}262\ldots \cdot x}}$

[$a > 0$, $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

b) 

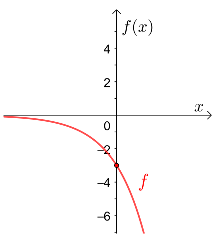
$\boldsymbol{f(x) = 0{,}8^x}$

$\boldsymbol{f(x) = e^{-0{,}223\ldots \cdot x}}$

[$a > 0$, $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

c) 

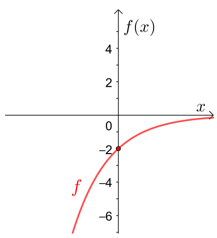
$\boldsymbol{f(x) = -3 \cdot 1{,}5^x}$

$\boldsymbol{f(x) = -3 \cdot e^{0{,}405\ldots \cdot x}}$

[$a < 0$, $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

d) 

$\boldsymbol{f(x) = -2 \cdot 0{,}7^x}$

$\boldsymbol{f(x) = -2 \cdot e^{0{,}356\ldots \cdot x}}$

[$a < 0$, $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Summe von Funktionen

Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion s mit: $s(x) = f(x) + g(x)$

Wenn $f(x) \to a$ und $g(x) \to b$, dann gilt:

$$s(x) = f(x) + g(x) \to a + b$$

Wenn $f(x) \to a$ und $g(x) \to \infty$, dann gilt:

$$s(x) = f(x) + g(x) \to \infty$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b \in \mathbb{R}$).

$+$	b	∞	$-\infty$
a	$a+b$	∞	$-\infty$
∞	∞	∞	unbestimmt
$-\infty$	$-\infty$	unbestimmt	$-\infty$

Bei $\infty - \infty$ sprechen wir von einem unbestimmten Ausdruck, weil das Ergebnis von f und g abhängt:

Wenn $f(x) = 4 \cdot x \to \infty$ und $g(x) = -2 \cdot x \to -\infty$, dann $s(x) = 4 \cdot x + (-2 \cdot x) = 2 \cdot x \to \infty$.

Wenn $f(x) = 2 \cdot x \to \infty$ und $g(x) = -4 \cdot x \to -\infty$, dann $s(x) = 2 \cdot x + (-4 \cdot x) = -2 \cdot x \to -\infty$.

Differenz von Funktionen

Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion d mit:

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b \in \mathbb{R}$).

$-$	b	∞	$-\infty$
a	$a-b$	$-\infty$	∞
∞	∞	unbestimmt	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	unbestimmt

Produkt von Funktionen

Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion p mit:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b > 0$).

$\cdot$	b	$-b$	0	∞	$-\infty$
a	$a \cdot b$	$-a \cdot b$	0	∞	$-\infty$
$-a$	$-a \cdot b$	$a \cdot b$	0	$-\infty$	∞
0	0	0	0	unbest.	unbest.
∞	∞	$-\infty$	unbest.	∞	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	∞	unbest.	$-\infty$	∞

Quotient von Funktionen

Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion q mit:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } g(x) \neq 0$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b > 0$).

$/$	b	$-b$	0	∞	$-\infty$
a	a/b	$-a/b$	unbest.	0	0
$-a$	$-a/b$	a/b	unbest.	0	0
0	0	0	unbest.	0	0
∞	∞	$-\infty$	unbest.	unbest.	unbest.
$-\infty$	$-\infty$	∞	unbest.	unbest.	unbest.

Verkettung von Funktionen

a) Wenn $t \to \infty$, dann $0{,}87^t \to 0$ und damit: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{20}{4 + 2 \cdot 0{,}87^t} = \dfrac{20}{4 + 2 \cdot 0} = 5$

b) Wenn $x \to \infty$, dann $x^2 - x \to \infty$ und damit: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - x} = 0$

c) Wenn $x \to \infty$, dann $-x^2 \to -\infty$ und damit: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$