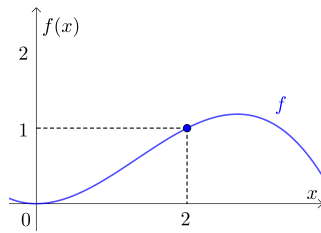
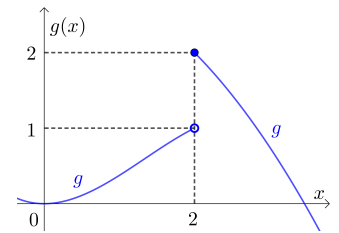


Stetigkeit: „Kleine Veränderungen in x -Richtung bewirken kleine Veränderungen in y -Richtung.“



Wie ändern sich links die Funktionswerte von f , wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?

Wie ändern sich rechts die Funktionswerte von g , wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?



Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = 2$.

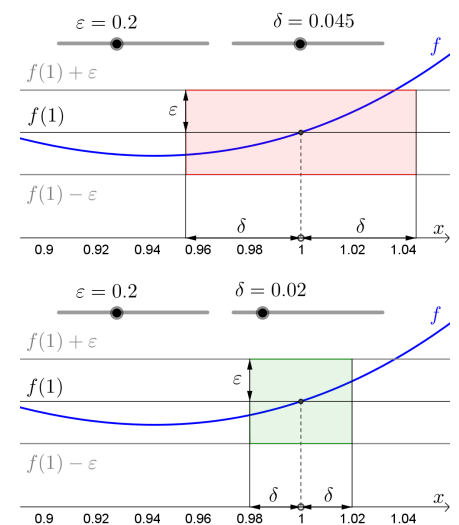
Die Funktion g ist **unstetig** an der Stelle $x = 2$.

Stetigkeit ist in der Mathematik exakt definiert:

Die rechts dargestellte Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

Das heißt, wir können stets das folgende Spiel gewinnen:

- 1) Unser Gegner legt eine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ fest.
In den Bildern rechts ist zum Beispiel $\varepsilon = 0,2$.
- 2) Danach wählen wir einen Spielraum $\delta > 0$.
Im Bild oben ist $\delta = 0,045$. Im Bild unten ist $\delta = 0,02$.
- 3) Die Fehlertoleranz ε und der Spielraum δ legen – wie rechts dargestellt – ein Rechteck mit Mittelpunkt $(1 | f(1))$, Breite $2 \cdot \delta$ und Höhe $2 \cdot \varepsilon$ fest.
- 4) Liegt an jeder Stelle x in $]1 - \delta; 1 + \delta[$ der zugehörige Funktionswert $f(x)$ in $]f(1) - \varepsilon; f(1) + \varepsilon[$, dann gewinnt unser Spielraum δ gegen die vorgegebene Fehlertoleranz ε .
In diesem Spiel gewinnt also $\delta = 0,02$ gegen $\varepsilon = 0,2$.



Wenn es an der Stelle x_0 zu jeder noch so kleinen positiven Fehlertoleranz ε einen passenden positiven Spielraum δ gibt, dann ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig.

Genau dann, wenn die Funktion f **stetig an der Stelle x_0** ist, schreiben wir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Wenn die Funktion f an jeder Stelle x_0 stetig ist, dann ist f eine **stetige Funktion**.

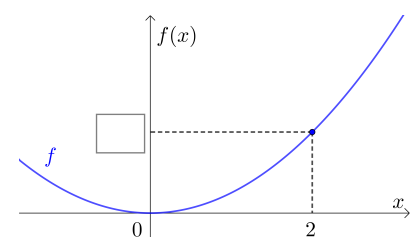
Der Ausdruck $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ist der sogenannte Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 . Beim Versuch, diesen Grenzwert zu ermitteln, können neben Stetigkeit – also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ – auch noch einige andere Fälle eintreten.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II](#).

Die rechts dargestellte Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$. Ermittle ihren Grenzwert an dieser Stelle:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{}$$

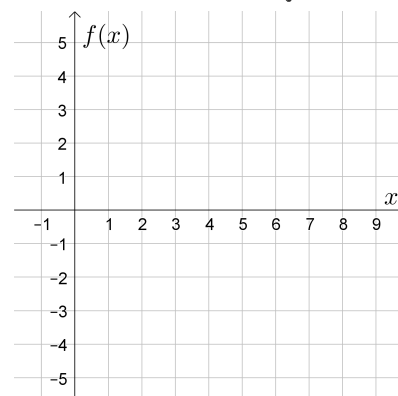
Trage rechts die richtige Zahl in das Kästchen ein.



Stückweise definierte Funktion



Für die Funktion f gilt:
$$f(x) = \begin{cases} -2 \cdot x + a, & \text{falls } x < 2, \\ -3, & \text{falls } 2 \leq x \leq 6, \\ \frac{1}{3} \cdot x + b, & \text{falls } x > 6. \end{cases}$$



- Berechne die Zahlen a und b so, dass die Funktion f stetig ist.
- Zeichne rechts den Funktionsgraphen ein.

Stetige Funktionen



Die **elementaren Funktionen** sind – überall dort, wo sie definiert sind – **stetig**. Dazu zählen:

- Polynomfunktionen:** $f(x) = 4 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x + 42$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- Potenzfunktionen:** $p(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Wurzelfunktionen:** $w(x) = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$
- Exponentialfunktionen:** $e(x) = 4^x$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- Logarithmusfunktionen:** $\ell(x) = \log_4(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$
- Winkelfunktionen:** $s(x) = \sin(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- Arkusfunktionen:** $a(x) = \arcsin(x)$ mit Definitionsmenge $D = [-1; 1]$

Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann sind auch ihre **Summe**, ihre **Differenz**, ihr **Produkt**, ihr **Quotient** und ihre **Verkettung** wieder im gesamten Definitionsbereich **stetig**.

Baukastenprinzip



Die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x}$ und g mit $g(x) = x - 1$ sind als elementare Funktionen stetig.

- Die Funktion s mit $s(x) = \sqrt{x} + x - 1$ ist als Summe stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion s ist für alle $x \geq \boxed{}$ definiert.
- Die Funktion d mit $d(x) = \sqrt{x} - x + 1$ ist als Differenz stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion d ist für alle $x \geq \boxed{}$ definiert.
- Die Funktion p mit $p(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ ist als Produkt stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion p ist für alle $x \geq \boxed{}$ definiert.
- Die Funktion q mit $q(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$ ist als Quotient stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion q ist für alle $x \geq \boxed{}$ außer $x = \boxed{}$ definiert.
- Die Funktion k mit $k(x) = \sqrt{x - 1}$ ist als Verkettung stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion k ist für alle $x \geq \boxed{}$ definiert.



Die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{x-4}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert außer für $x = \boxed{}$.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

i) Wenn x „ein bisschen“ größer als 4 ist, dann ist $f(x)$ eine positive / negative und betragsmäßig „sehr große“ / „sehr kleine“ Zahl.

$\frac{3}{0,000\ 01}$

ii) Wenn x „ein bisschen“ kleiner als 4 ist, dann ist $f(x)$ eine positive / negative und betragsmäßig „sehr große“ / „sehr kleine“ Zahl.

$\frac{3}{-0,000\ 01}$

Der Graph der Funktion f ist rechts dargestellt.

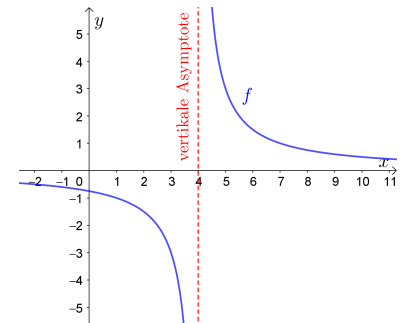
Die Stelle $x = 4$ nennt man eine **Polstelle** von f .

Die strichlierte senkrechte Gerade durch die Polstelle nennt man eine **vertikale Asymptote** von f .

Der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x = 4$ ist $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$.

Der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x = 4$ ist $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II](#).



Beim **asymptotischen Verhalten** einer Funktion f untersuchen wir ihre Funktionswerte $f(x)$, wenn x gegen unendlich geht ($x \rightarrow \infty$) bzw. x gegen minus unendlich geht ($x \rightarrow -\infty$).

Dabei tritt jeweils genau einer der 4 folgenden Fälle ein:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

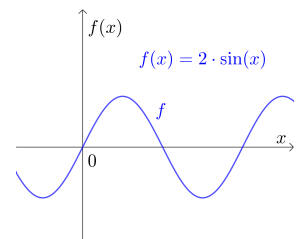
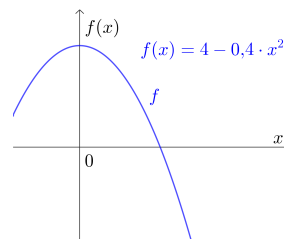
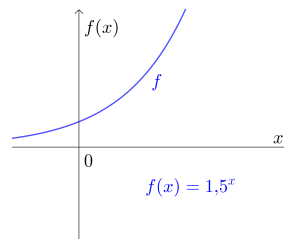
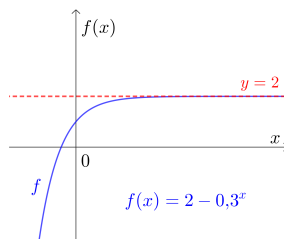
iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Kurz: $f(x) \rightarrow c$

Kurz: $f(x) \rightarrow \infty$

Kurz: $f(x) \rightarrow -\infty$

existiert nicht.



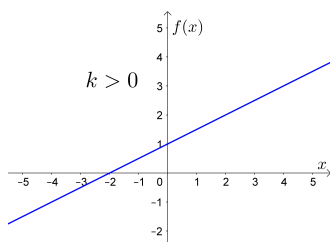
Die Definition dieser Grenzwerte ist ähnlich zu der Definition des Grenzwerts von [Folgen](#).

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Grenzwert von Funktionen II](#).



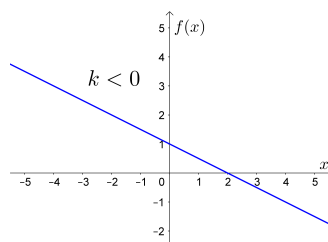
Lineare Funktionen: $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$

Die **Steigung** k bestimmt das asymptotische Verhalten von f .



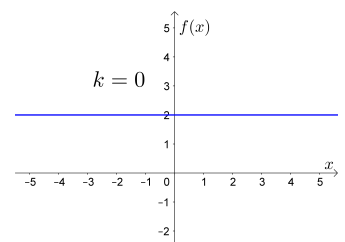
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$

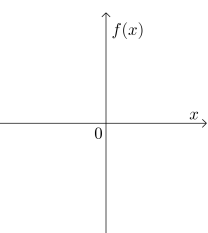
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

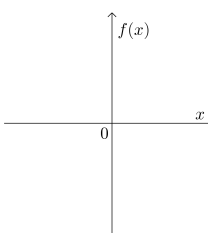
Potenzfunktionen: $f(x) = a \cdot x^m$ mit $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^*$

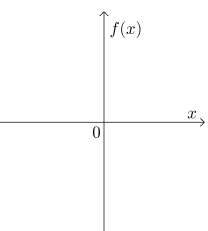
Das Verhalten an der Stelle $x = 0$ und das asymptotische Verhalten hängen von a und m ab.

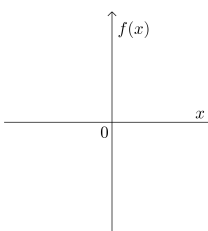
[Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ?]

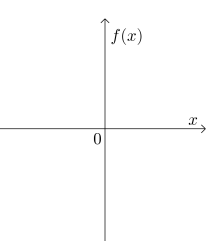
Ermittle jeweils das asymptotische Verhalten und skizziere den Funktionsgraphen.

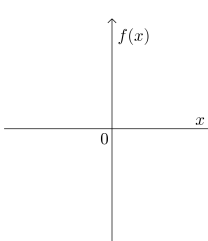
a)  $f(x) = x^2$
 $[m > 0, m \text{ gerade}, a > 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

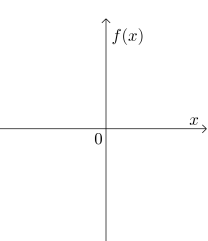
b)  $f(x) = -x^2$
 $[m > 0, m \text{ gerade}, a < 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

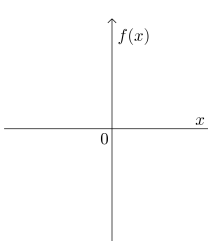
c)  $f(x) = x^3$
 $[m > 0, m \text{ ungerade}, a > 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

d)  $f(x) = -x^3$
 $[m > 0, m \text{ ungerade}, a < 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

e)  $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
 $[m < 0, m \text{ gerade}, a > 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

f)  $f(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
 $[m < 0, m \text{ gerade}, a < 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

g)  $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
 $[m < 0, m \text{ ungerade}, a > 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

h)  $f(x) = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$
 $[m < 0, m \text{ ungerade}, a < 0]$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

Um das asymptotische Verhalten von **Polynomfunktionen** zu begründen, heben wir heraus:

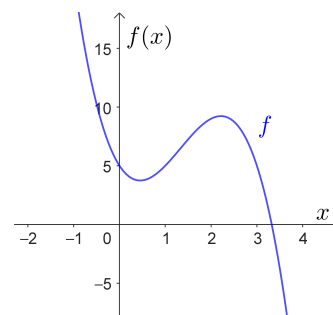
$$f(x) = -2 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 5 =$$

$$= -2 \cdot x^3 \cdot \left(\boxed{} - \underbrace{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}_{\rightarrow 0} \right)$$

Für diese Polynomfunktion f gilt also:

Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $f(x) \rightarrow \boxed{}$.

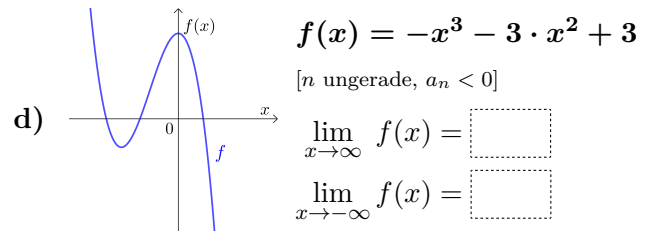
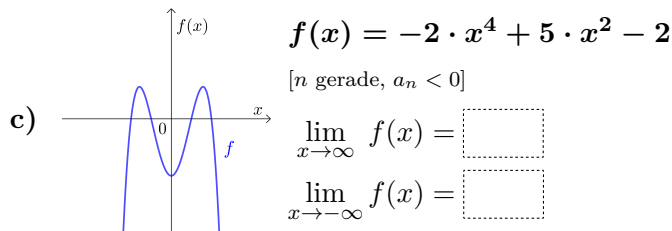
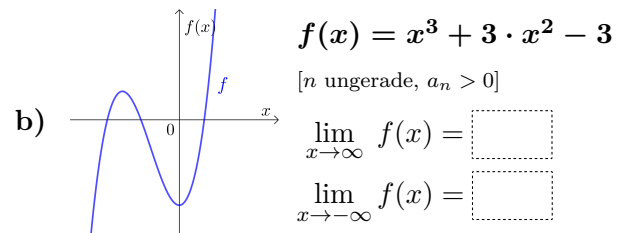
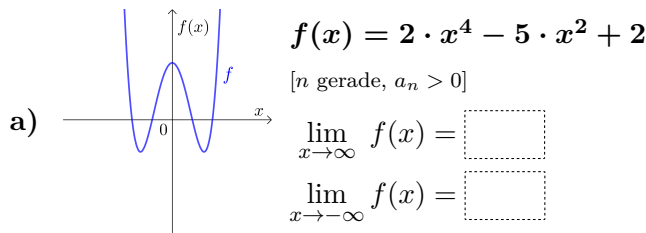
Wenn $x \rightarrow -\infty$, dann $f(x) \rightarrow \boxed{}$.



Polynomfunktionen: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_n \neq 0$

Der Term $a_n \cdot x^n$ bestimmt das asymptotische Verhalten.

[Ist n gerade oder ungerade? Ist a_n positiv oder negativ?]



Exponentialfunktionen: $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ mit $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ bzw. $\lambda \neq 0$

• $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$: Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $b^x \rightarrow \boxed{}$ bzw. $e^{\lambda x} \rightarrow \boxed{}$.

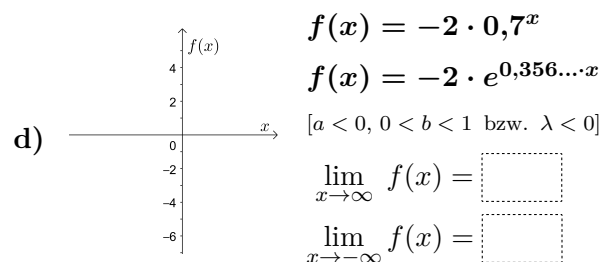
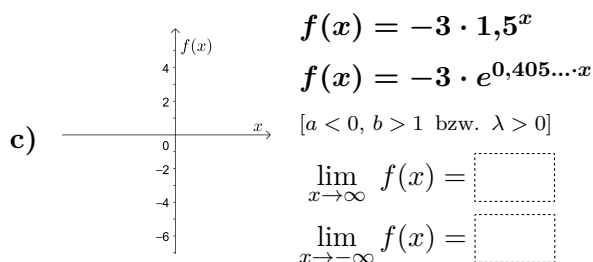
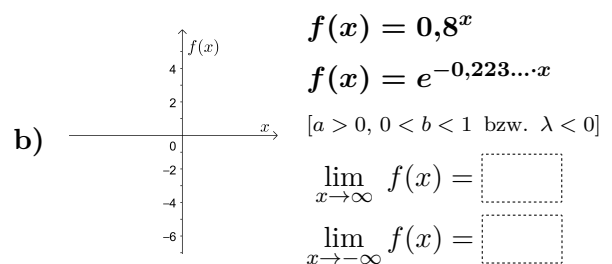
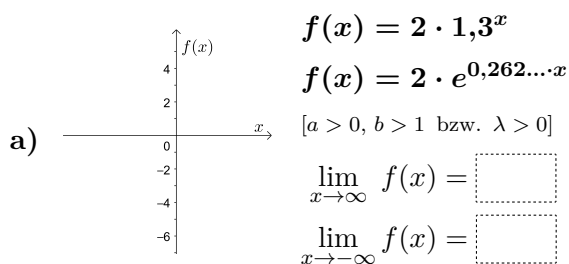
• $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$: Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $b^x \rightarrow \boxed{}$ bzw. $e^{\lambda x} \rightarrow \boxed{}$.

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \lim_{x \rightarrow \infty} b^{-x}$ und $b^{-x} = \frac{1}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ sind für $x \rightarrow -\infty$ die beiden Fälle genau vertauscht:

• $b > 1$ bzw. $\lambda > 0$: Wenn $x \rightarrow -\infty$, dann $b^x \rightarrow \boxed{}$ bzw. $e^{\lambda x} \rightarrow \boxed{}$.

• $0 < b < 1$ bzw. $\lambda < 0$: Wenn $x \rightarrow -\infty$, dann $b^x \rightarrow \boxed{}$ bzw. $e^{\lambda x} \rightarrow \boxed{}$.

Ermittle jeweils das asymptotische Verhalten und skizziere den Funktionsgraphen.



Summe von Funktionen



Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion s mit: $s(x) = f(x) + g(x)$

Wenn $f(x) \rightarrow a$ und $g(x) \rightarrow b$, dann gilt:

$$s(x) = f(x) + g(x) \rightarrow a + b$$

Wenn $f(x) \rightarrow a$ und $g(x) \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$s(x) = f(x) + g(x) \rightarrow \infty$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b \in \mathbb{R}$).

Bei $\infty - \infty$ sprechen wir von einem **unbestimmten Ausdruck**, weil das Ergebnis von f und g abhängt:

Wenn $f(x) = 4 \cdot x \rightarrow \infty$ und $g(x) = -2 \cdot x \rightarrow -\infty$, dann $s(x) = 4 \cdot x + (-2 \cdot x) = 2 \cdot x \rightarrow \infty$.

Wenn $f(x) = 2 \cdot x \rightarrow \infty$ und $g(x) = -4 \cdot x \rightarrow -\infty$, dann $s(x) = 2 \cdot x + (-4 \cdot x) = -2 \cdot x \rightarrow -\infty$.

+	b	∞	$-\infty$
a	$a + b$	∞	
∞			unbestimmt
$-\infty$		unbestimmt	

Differenz von Funktionen



Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion d mit:

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b \in \mathbb{R}$).

-	b	∞	$-\infty$
a	$a - b$		
∞		unbestimmt	
$-\infty$			unbestimmt

Produkt von Funktionen



Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion p mit:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b > 0$).

$\cdot$	b	$-b$	0	∞	$-\infty$
a	$a \cdot b$				
$-a$					
0				unbest.	unbest.
∞			unbest.		
$-\infty$			unbest.		

Quotient von Funktionen



Aus den Funktionen f und g bilden wir die Funktion q mit:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } g(x) \neq 0$$

Vervollständige rechts die Tabelle ($a, b > 0$).

/	b	$-b$	0	∞	$-\infty$
a	a/b		unbest.		
$-a$			unbest.		
0			unbest.		
∞			unbest.	unbest.	unbest.
$-\infty$			unbest.	unbest.	unbest.

Verkettung von Funktionen



a) Wenn $t \rightarrow \infty$, dann $0,87^t \rightarrow \boxed{}$ und damit: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20}{4 + 2 \cdot 0,87^t} = \frac{20}{4 + 2 \cdot \boxed{}} = \boxed{}$

b) Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $x^2 - x \rightarrow \boxed{}$ und damit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - x} = \boxed{}$

c) Wenn $x \rightarrow \infty$, dann $-x^2 \rightarrow \boxed{}$ und damit: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = \boxed{}$

