

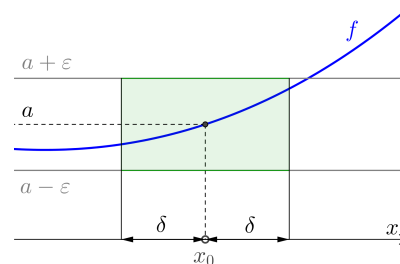


Für den **Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0** schreiben wir kurz: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Bei diesem Grenzwert betrachten wir die Funktionswerte an allen Stellen, die *ein bisschen* links bzw. rechts von x_0 liegen.

Wir untersuchen dann, wie sich die Funktionswerte verhalten, wenn wir uns der Stelle x_0 annähern.

Im Bild rechts gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, das heißt, die Funktion f ist **stetig** an der Stelle x_0 .



Allgemein gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

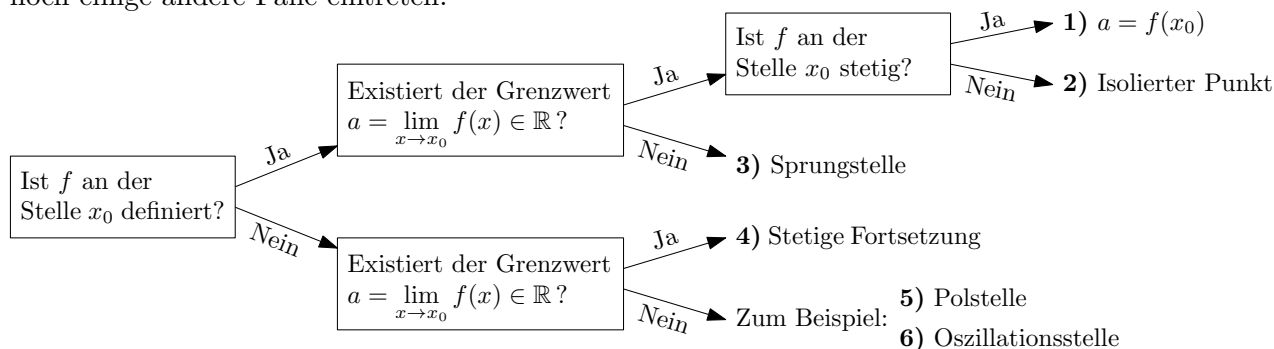
Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$ so, dass

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

für alle x in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ mit $x \neq x_0$ gilt.

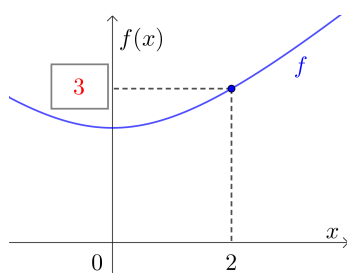
Dabei muss f an der Stelle x_0 *nicht* unbedingt definiert sein.

Beim Versuch, diesen Grenzwert zu ermitteln, können neben Stetigkeit – also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ – auch noch einige andere Fälle eintreten:



Auf dem restlichen Arbeitsblatt erfährst du mehr zu den Fällen 1) – 6).

1) Stetigkeit an einer Stelle



Die links dargestellte Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ ist – als Zusammensetzung stetiger Funktionen – eine stetige Funktion. Ermittle den Grenzwert von f an der Stelle $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \sqrt{9} = 3$$

Trage links die richtige Zahl in das Kästchen ein.

2) Isolierter Punkt



Für die rechts dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \neq 2, \\ 3, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$

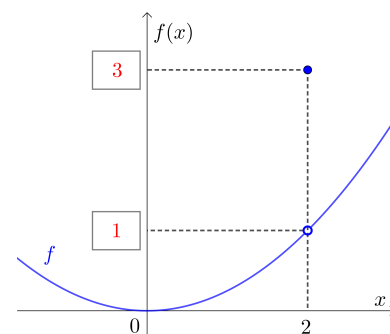
Trage rechts die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existiert, aber f ist unstetig an der Stelle 2.

Der Funktionswert $f(2)$ an der untersuchten Stelle $x_0 = 2$ ist für die Stetigkeit wesentlich, aber gemäß obiger Definition *nicht* für den Wert von $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Für diese Funktion f gilt: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

Am Funktionsgraphen von f ist $(2 | 3)$ ein **isolierter Punkt**.



3) Sprungstelle



Für die rechts dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x < 2, \\ 3 - \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$

Trage rechts die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

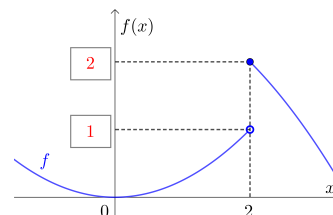
Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existiert *nicht*. Für $\varepsilon = 0,5$ gibt es kein passendes $\delta > 0$.

Nähern wir uns von der linken Seite an, dann gilt: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

Nähern wir uns von der rechten Seite an, dann gilt: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

Allgemein untersuchen wir beim **linksseitigen Grenzwert** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ die Funktionswerte an allen Stellen in $]x_0 - \delta; x_0[$.

Allgemein untersuchen wir beim **rechtsseitigen Grenzwert** $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ die Funktionswerte an allen Stellen in $]x_0; x_0 + \delta[$.



4) Stetige Fortsetzung



Die Funktion f mit $f(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 18}{x - 3}$ ist an der Stelle $x_0 = 3$ *nicht* definiert.

Beim Versuch, für x den Wert 3 einzusetzen, erhalten wir einen **unbestimmten Ausdruck** $\frac{0}{0}$.

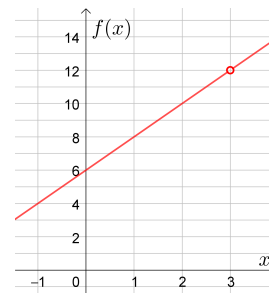
Es gilt: $f(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 9)}{x - 3} = \frac{2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)}{(x - 3)}$

Für $x \neq 3$ ist f also eine **lineare Funktion** mit $f(x) = 2 \cdot x + 6$.

Zeichne rechts den Funktionsgraphen von f ein.

Ermittle den Grenzwert von f an der Stelle $x_0 = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \cdot 3 + 6 = 12$

In diesem Fall ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ zwar *nicht* definiert, aber der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f an dieser Stelle existieren und stimmen überein.



Die Funktion f hat eine **stetige Fortsetzung**, nämlich: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq 3, \\ 12, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$

Die Funktion $\tilde{f}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und eine stetige Funktion.

Dieser Fall mit unbestimmten Ausdrücken $\frac{0}{0}$ tritt zum Beispiel auf, wenn wir die Steigung einer Funktion an einer Stelle berechnen.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Differentialquotient](#).

5) Polstellen



Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(x+2) \cdot (x-3)^2}$ ist an den Stellen -2 und 3 *nicht* definiert.

Was passiert mit den Funktionswerten, wenn wir uns diesen Stellen von links bzw. rechts annähern?

Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f .

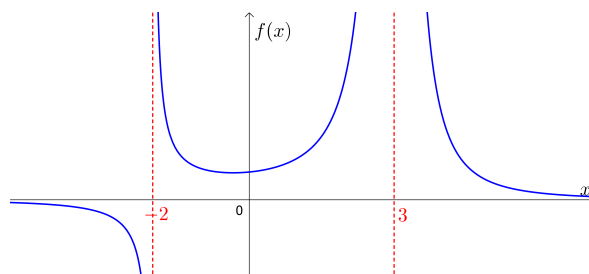
Achte dabei auch auf das richtige Vorzeichen der Funktionswerte.

Die strichlierten senkrechten Geraden heißen **vertikale Asymptoten**.

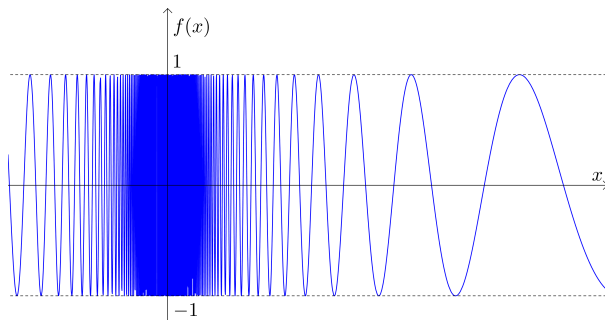
Die Stellen -2 und 3 sind **Polstellen** von f .

Die Funktion g mit $g(x) = (x+2) \cdot f(x)$ hat eine stetige Fortsetzung an der Stelle $x = -2$.

Die Funktion h mit $h(x) = (x-3)^2 \cdot f(x)$ hat eine stetige Fortsetzung an der Stelle $x = 3$.



6) Oszillationsstelle



Die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht* definiert.

Jede noch so kleine Umgebung von x_0 enthält jeden Funktionswert in $[-1; 1]$.

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert *nicht*.

Für $\varepsilon = 0,5$ gibt es kein passendes $\delta > 0$.

Eine solche Stelle heißt auch **Oszillationsstelle**.

Stetigkeit (Exaktifizierung)



Die Funktion f ist **stetig an der Stelle x_0** , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ gilt.

Beachte, dass bei dieser Definition auch der Funktionswert $f(x_0)$ wesentlich ist.

Wenn die Funktion f an jeder Stelle x_0 stetig ist, dann ist f eine **stetige Funktion**.

 ε - δ -Beweis

Wir rechnen nach, dass die Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ stetig ist:

Dafür müssen wir zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ finden,

sodass für alle Zahlen x im **Intervall** $]3 - \delta; 3 + \delta[$ die Ungleichung $\underbrace{|f(x) - f(3)|}_{\text{Abstand von } f(x) \text{ zu } f(3)} < \varepsilon$ stimmt.

Abstand von $f(x)$ zu $f(3)$

Um eine Idee für δ zu bekommen, formen wir die linke Seite der Ungleichung um:

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |(x - 3) \cdot (x + 3)| = |x - 3| \cdot |x + 3|$$

Wie groß kann $|x - 3| \cdot |x + 3|$ maximal sein, wenn wir δ kennen? Wir ermitteln eine obere Schranke:

- Wenn x in $]3 - \delta; 3 + \delta[$ liegt, dann gilt: $\underbrace{|x - 3|}_{\text{Abstand von } x \text{ zu } 3} < \delta$
- Wenn $\delta \leq 1$ ist, dann gilt für alle Zahlen x in $]3 - \delta; 3 + \delta[$ auch: $|x + 3| < 7$

Für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ wählen wir: $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{7}; 1\} > 0$

Dann gilt für alle Zahlen x in $]3 - \delta; 3 + \delta[$ tatsächlich:

δ ist also die kleinere der beiden Zahlen $\frac{\varepsilon}{7}$ und 1.

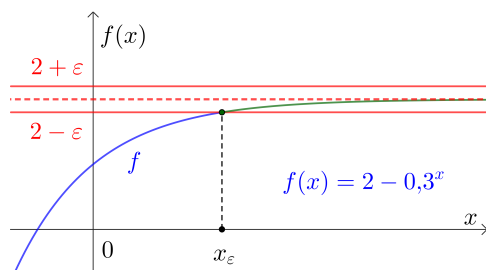
$$|f(x) - f(3)| = |x - 3| \cdot |x + 3| < \delta \cdot 7 \leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

Also ist die Funktion f stetig an der Stelle 3.

Beim **asymptotischen Verhalten** einer Funktion f untersuchen wir ihre Funktionswerte $f(x)$, wenn x gegen unendlich geht ($x \rightarrow \infty$) bzw. x gegen minus unendlich geht ($x \rightarrow -\infty$). Dabei tritt jeweils genau einer der 4 folgenden Fälle ein:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

Kurz: $f(x) \rightarrow c$



Für die Funktion f mit $f(x) = 2 - 0,3^x$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

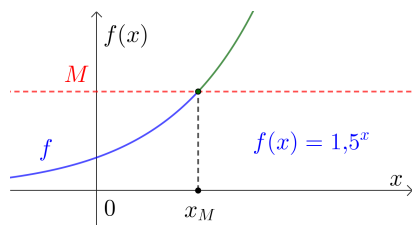
Das heißt: Zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Stelle x_ε , sodass

$$2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$$

für alle $x \geq x_\varepsilon$ gilt.

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Kurz: $f(x) \rightarrow \infty$



Für die Funktion f mit $f(x) = 1,5^x$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

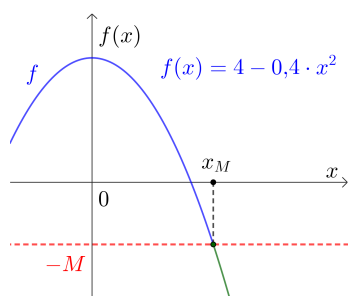
Das heißt: Zu jeder noch so großen Zahl M gibt es eine Stelle x_M , sodass

$$f(x) > M$$

für alle $x \geq x_M$ gilt.

iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

Kurz: $f(x) \rightarrow -\infty$



Für die Funktion f mit $f(x) = 4 - 0,4 \cdot x^2$ gilt:

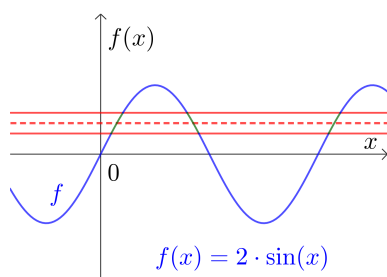
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

Das heißt: Zu jeder noch so großen Zahl M gibt es eine Stelle x_M , sodass

$$f(x) < -M$$

für alle $x \geq x_M$ gilt.

iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert *nicht*.



Für die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$ gilt:

- Ihre Funktionswerte sind auf das Intervall $[-2; 2]$ beschränkt. Für $x \rightarrow \infty$ kann der Grenzwert also weder $-\infty$ noch ∞ sein.
- Für $x \rightarrow \infty$ kann der Grenzwert aber auch keine Zahl $c \in \mathbb{R}$ sein, denn es gilt: Für $\varepsilon = 0,3$ gibt es keine Stelle x_ε , sodass

$$c - 0,3 < f(x) < c + 0,3$$

für alle $x \geq x_\varepsilon$ gilt.

In diesem Fall existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ *nicht*.

