

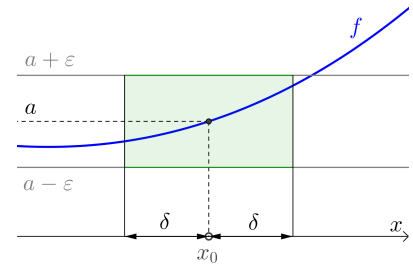


Für den **Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$**  schreiben wir kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Bei diesem Grenzwert betrachten wir die Funktionswerte an allen Stellen, die *ein bisschen* links bzw. rechts von  $x_0$  liegen.

Wir untersuchen dann, wie sich die Funktionswerte verhalten, wenn wir uns der Stelle  $x_0$  annähern.

Im Bild rechts gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , das heißt, die Funktion  $f$  ist **stetig** an der Stelle  $x_0$ .



Allgemein gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  mit  $a \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

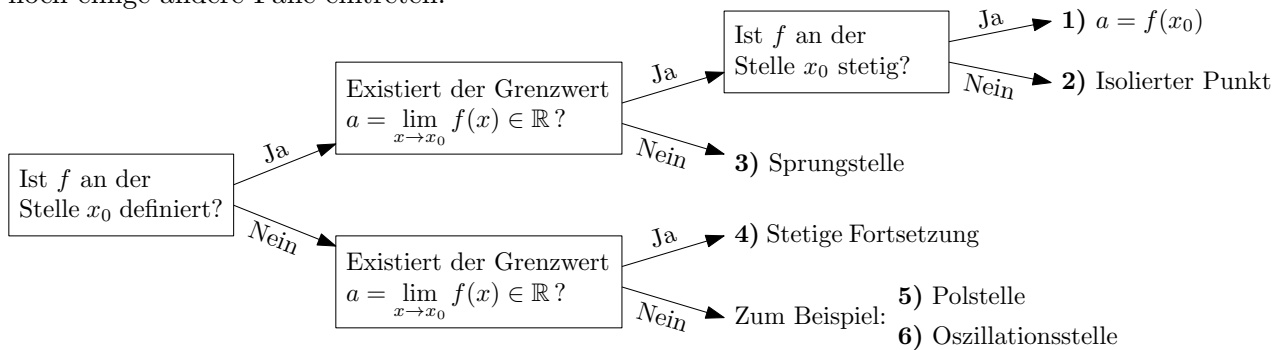
Für jede Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zahl  $\delta > 0$  so, dass

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

für alle  $x$  in  $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$  mit  $x \neq x_0$  gilt.

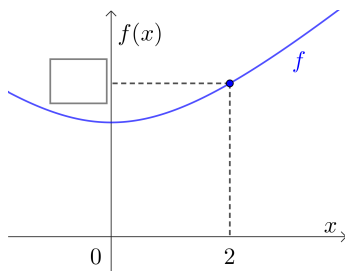
Dabei muss  $f$  an der Stelle  $x_0$  *nicht* unbedingt definiert sein.

Beim Versuch, diesen Grenzwert zu ermitteln, können neben Stetigkeit – also  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  – auch noch einige andere Fälle eintreten:



Auf dem restlichen Arbeitsblatt erfährst du mehr zu den Fällen 1) – 6).

### 1) Stetigkeit an einer Stelle



Die links dargestellte Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  ist – als Zusammensetzung stetiger Funktionen – eine stetige Funktion. Ermittle den Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{\phantom{000}}$$

Trage links die richtige Zahl in das Kästchen ein.

### 2) Isolierter Punkt



Für die rechts dargestellte Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \neq 2, \\ 3, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$

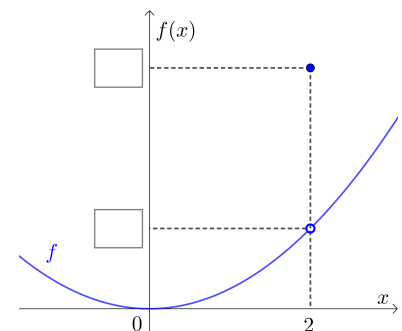
Trage rechts die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existiert, aber  $f$  ist unstetig an der Stelle 2.

Der Funktionswert  $f(2)$  an der untersuchten Stelle  $x_0 = 2$  ist für die Stetigkeit wesentlich, aber gemäß obiger Definition *nicht* für den Wert von  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Für diese Funktion  $f$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{\phantom{000}}$

Am Funktionsgraphen von  $f$  ist  $(2 | 3)$  ein **isolierter Punkt**.



## 3) Sprungstelle



Für die rechts dargestellte Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x < 2, \\ 3 - \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$

Trage rechts die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

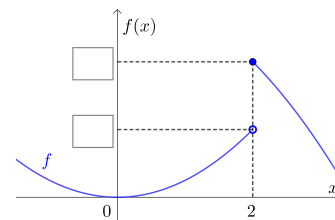
Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existiert *nicht*. Für  $\varepsilon = 0,5$  gibt es kein passendes  $\delta > 0$ .

Nähern wir uns von der linken Seite an, dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$

Nähern wir uns von der rechten Seite an, dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$

Allgemein untersuchen wir beim **linksseitigen Grenzwert**  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  die Funktionswerte an allen Stellen in  $]x_0 - \delta; x_0[$ .

Allgemein untersuchen wir beim **rechtsseitigen Grenzwert**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  die Funktionswerte an allen Stellen in  $]x_0; x_0 + \delta[$ .



## 4) Stetige Fortsetzung



Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 18}{x - 3}$  ist an der Stelle  $x_0 = \boxed{\phantom{00}}$  *nicht* definiert.

Beim Versuch, für  $x$  den Wert 3 einzusetzen, erhalten wir einen **unbestimmten Ausdruck**  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$ .

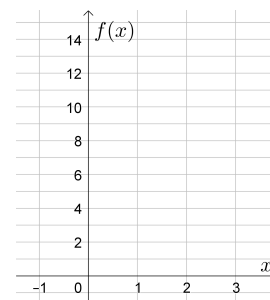
Es gilt:  $f(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 9)}{x - 3} = \frac{2 \cdot (x - \boxed{\phantom{00}}) \cdot (x + \boxed{\phantom{00}})}{(x - 3)}$

Für  $x \neq 3$  ist  $f$  also eine **lineare Funktion** mit  $f(x) = \boxed{\phantom{00}}$ .

Zeichne rechts den Funktionsgraphen von  $f$  ein.

Ermittle den Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 3$ :  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$

In diesem Fall ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 = 3$  zwar *nicht* definiert, aber der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von  $f$  an dieser Stelle existieren und stimmen überein.



Die Funktion  $f$  hat eine **stetige Fortsetzung**, nämlich:  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq 3, \\ \boxed{\phantom{00}}, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$

Die Funktion  $\tilde{f}$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert und eine stetige Funktion.

Dieser Fall mit unbestimmten Ausdrücken  $\frac{0}{0}$  tritt zum Beispiel auf, wenn wir die Steigung einer Funktion an einer Stelle berechnen.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Differentialquotient](#).

## 5) Polstellen



Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{(x+2) \cdot (x-3)^2}$  ist an den Stellen  $\boxed{\phantom{00}}$  und  $\boxed{\phantom{00}}$  *nicht* definiert.

Was passiert mit den Funktionswerten, wenn wir uns diesen Stellen von links bzw. rechts annähern?

Skizziere rechts den Funktionsgraphen von  $f$ .

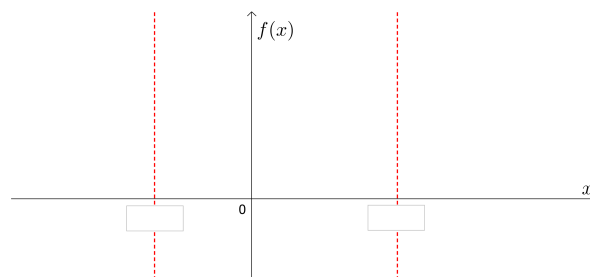
Achte dabei auch auf das richtige Vorzeichen der Funktionswerte.

Die strichlierten senkrechten Geraden heißen **vertikale Asymptoten**.

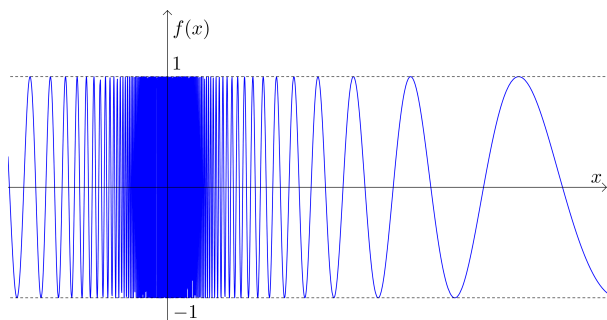
Die Stellen  $-2$  und  $3$  sind **Polstellen** von  $f$ .

Die Funktion  $g$  mit  $g(x) = (x+2) \cdot f(x)$  hat eine stetige Fortsetzung an der Stelle  $x = -2$ .

Die Funktion  $h$  mit  $h(x) = (x-3)^2 \cdot f(x)$  hat eine stetige Fortsetzung an der Stelle  $x = 3$ .



## 6) Oszillationsstelle



Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ist an der Stelle  $x_0 = \boxed{\phantom{0}}$  *nicht* definiert.

Jede noch so kleine Umgebung von  $x_0$  enthält jeden Funktionswert in  $[-1; 1]$ .

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert *nicht*.

Für  $\varepsilon = 0,5$  gibt es kein passendes  $\delta > 0$ .

Eine solche Stelle heißt auch **Oszillationsstelle**.

## Stetigkeit (Exaktifizierung)



Die Funktion  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle  $x$  in  $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$  gilt.

Beachte, dass bei dieser Definition auch der Funktionswert  $f(x_0)$  wesentlich ist.

Wenn die Funktion  $f$  an jeder Stelle  $x_0$  stetig ist, dann ist  $f$  eine **stetige Funktion**.

 $\varepsilon$ - $\delta$ -Beweis

Wir rechnen nach, dass die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x_0 = 3$  stetig ist:

Dafür müssen wir zu jeder noch so kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  finden,

sodass für alle Zahlen  $x$  im Intervall  $]3 - \delta; 3 + \delta[$  die Ungleichung  $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$  stimmt.

Abstand von  $f(x)$  zu  $f(3)$

Um eine Idee für  $\delta$  zu bekommen, formen wir die linke Seite der Ungleichung um:

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |(x - 3) \cdot (x + 3)| = |x - 3| \cdot |x + 3|$$

Wie groß kann  $|x - 3| \cdot |x + 3|$  maximal sein, wenn wir  $\delta$  kennen? Wir ermitteln eine obere Schranke:

- Wenn  $x$  in  $]3 - \delta; 3 + \delta[$  liegt, dann gilt:  $\underbrace{|x - 3|}_{\text{Abstand von } x \text{ zu } 3} < \delta$
- Wenn  $\delta \leq 1$  ist, dann gilt für alle Zahlen  $x$  in  $]3 - \delta; 3 + \delta[$  auch:  $|x + 3| < 7$

Für jede noch so kleine Zahl  $\varepsilon > 0$  wählen wir:  $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}; 1\right\} > 0$

Dann gilt für alle Zahlen  $x$  in  $]3 - \delta; 3 + \delta[$  tatsächlich:

$\delta$  ist also die kleinere der beiden Zahlen  $\frac{\varepsilon}{7}$  und 1.

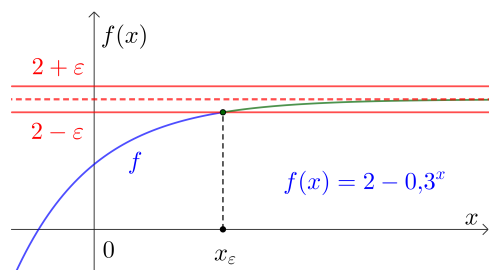
$$|f(x) - f(3)| = |x - 3| \cdot |x + 3| < \delta \cdot 7 \leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

Also ist die Funktion  $f$  stetig an der Stelle 3.

Beim **asymptotischen Verhalten** einer Funktion  $f$  untersuchen wir ihre Funktionswerte  $f(x)$ , wenn  $x$  gegen unendlich geht ( $x \rightarrow \infty$ ) bzw.  $x$  gegen minus unendlich geht ( $x \rightarrow -\infty$ ). Dabei tritt jeweils genau einer der 4 folgenden Fälle ein:

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

Kurz:  $f(x) \rightarrow c$



Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2 - 0,3^x$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

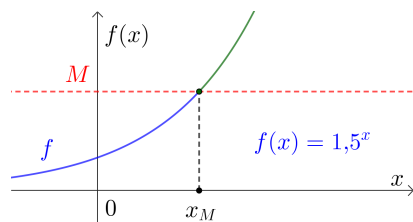
Das heißt: Zu jeder noch so kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Stelle  $x_\varepsilon$ , sodass

$$2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$$

für alle  $x \geq x_\varepsilon$  gilt.

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Kurz:  $f(x) \rightarrow \infty$



Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1,5^x$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

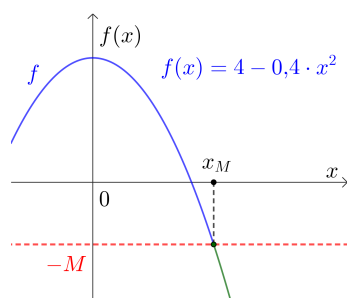
Das heißt: Zu jeder noch so großen Zahl  $M$  gibt es eine Stelle  $x_M$ , sodass

$$f(x) > M$$

für alle  $x \geq x_M$  gilt.

iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

Kurz:  $f(x) \rightarrow -\infty$



Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 4 - 0,4 \cdot x^2$  gilt:

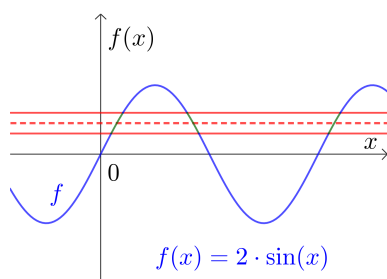
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

Das heißt: Zu jeder noch so großen Zahl  $M$  gibt es eine Stelle  $x_M$ , sodass

$$f(x) < -M$$

für alle  $x \geq x_M$  gilt.

iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existiert *nicht*.



Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$  gilt:

- Ihre Funktionswerte sind auf das Intervall  $[-2; 2]$  beschränkt. Für  $x \rightarrow \infty$  kann der Grenzwert also weder  $-\infty$  noch  $\infty$  sein.
- Für  $x \rightarrow \infty$  kann der Grenzwert aber auch keine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  sein, denn es gilt: Für  $\varepsilon = 0,3$  gibt es keine Stelle  $x_\varepsilon$ , sodass

$$c - 0,3 < f(x) < c + 0,3$$

für alle  $x \geq x_\varepsilon$  gilt.

In diesem Fall existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  *nicht*.

