**Kürzungsregel für Kongruenzen**

Erinnere dich an die folgende Rechenregel für Kongruenzen:

$$\boldsymbol{a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m \iff a \equiv b \mod \frac{m}{\mathrm{ggT}(c,m)}}$$

Eine Erklärung für die Rechenregel findest du am Arbeitsblatt – Kongruenz und Restklassen.

Wenn $c$ und $m$ teilerfremd sind, dann gilt also:

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m \iff a \equiv b \mod m$$

**Kleiner Satz von Fermat (1640)**

Für jede ganze Zahl $a$ und jede Primzahl $p$ gilt der **Kleine Satz von Fermat**:

$$\boldsymbol{a^p \equiv a \mod p}$$

Zum Beispiel: $\underbrace{4^5}_{=1024} \equiv 4 \mod 5$

Wenn $a$ kein Vielfaches von $p$ ist, dann gilt $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$ und damit:

$$\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1 \mod p}$$

**Pascalsches Dreieck & Primzahlen**

Die obersten 12 Reihen vom Pascalschen Dreieck sind dargestellt:

Die Zahl $p$ ist eine beliebige Primzahl.

In der entsprechenden Reihe sind alle Zahlen im Inneren jeweils Vielfache dieser Primzahl.

Zum Beispiel: Die Zahlen

$$7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 27,\ 7$$

sind alle durch 7 teilbar.

Das ist kein Zufall.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 1 | | | | | |
| | | | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| | | | | | $p=2$ | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| | | | | $p=3$ | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| | | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |
| | | | $p=5$ | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |
| | $p=7$ | 1 | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |
| | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 |
| 1 | | 9 | | 36 | | 84 | | 126 | | 126 | | 84 | | 36 | | 9 | | 1 |
| 1 | 10 | | 45 | | 120 | | 210 | | 252 | | 210 | | 120 | | 45 | | 10 | | 1 |
| $p=11$ 1 | 11 | | 55 | | 165 | | 330 | | 462 | | 462 | | 330 | | 165 | | 55 | | 11 | | 1 |

Die Zahlen in Reihe $p$ sind die folgenden Binomialkoeffizienten:

$$\binom{p}{0}, \binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \ldots, \binom{p}{p-1}, \binom{p}{p} \quad \text{mit} \quad \binom{p}{k} = \frac{\overbrace{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!}$$

Erkläre, warum die Primzahl $p$ den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ für alle $k$ mit $1 \le k \le p-1$ teilt.

Im Zähler von $\binom{p}{k}$ kommt der Faktor $p$ vor, weil $k \ge 1$.

Der Nenner $k!$ und $p$ sind teilerfremd, weil $p$ eine Primzahl ist und $k \le p-1$.

Das Ergebnis $\binom{p}{k}$ der Division ist eine ganze Zahl, deren Primfaktorzerlegung also $p$ enthalten muss.

**Kleiner Satz von Fermat (Beweis für $a \geq 0$)**

Wir beweisen jetzt $\boldsymbol{a^p \equiv a \mod p}$ für alle Primzahlen $p$ mit vollständiger Induktion nach $a \geq 0$.
Dabei verwenden wir die beiden folgenden Aussagen:

- Binomischer Lehrsatz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$
- $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ für alle Primzahlen $p$ und $1 \leq k \leq p-1$.

**1)** Überprüfe den **Induktionsanfang** für $a = 0$:

$$0^p \equiv 0 \mod p \checkmark$$

**2)** Überprüfe den **Induktionsschritt** $a \to a+1$ für $a \geq 0$:
Du darfst also verwenden, dass $a^p \equiv a \mod p$ gilt.
Daraus musst du folgern, dass auch $(a+1)^p \equiv a+1 \mod p$ gilt.

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot a^k \cdot 1^{p-k} = \underbrace{\binom{p}{p} \cdot a^p \cdot 1^0}_{=a^p\ (k=p)} + \underbrace{\binom{p}{0} \cdot a^0 \cdot 1^p}_{=1\ (k=0)} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{p}{k} \cdot a^k \cdot 1^{p-k}}_{\equiv 0 \bmod p} \equiv a^p + 1 \mod p$$

$$\Longrightarrow (a+1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a+1 \mod p \checkmark$$

**Kleiner Satz von Fermat (Beweis für $a < 0$)**

Für die gerade Primzahl $p = 2$ können wir $\boldsymbol{a^2 \equiv a \mod 2}$ für alle ganzen Zahlen $a$ direkt beweisen:

- Wenn $a$ gerade ist, dann ist $a^2$ eine gerade / ~~ungerade~~ Zahl.
- Wenn $a$ ungerade ist, dann ist $a^2$ eine ~~gerade~~ / ungerade Zahl.

Streiche jeweils durch.

Die ganzen Zahlen $a$ und $a^2$ liegen also in der gleichen Restklasse modulo 2.

---

Für jede ungerade Primzahl $p$ und *negative* ganze Zahl $a$ haben wir $(-a)^p \equiv (-a) \mod p$ gezeigt.
Folgere daraus, dass auch $a^p \equiv a \mod p$ gilt.

$(-a)^p = -a^p$, weil $p$ ungerade ist.

$$(-a)^p \equiv (-a) \mod p \Longrightarrow -a^p \equiv (-a) \mod p \overset{\cdot(-1)}{\Longrightarrow} a^p \equiv a \mod p$$

Also gilt $a^p \equiv a \mod p$ auch für alle negativen ganzen Zahlen $a$ und Primzahlen $p$.

**Satz von Euler**

Leonhard Euler (1707-1783) bewies, dass eine Verallgemeinerung von $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ nicht nur für Primzahlen $p$ stimmt, sondern für beliebige natürliche Zahlen.

Als Nächstes sehen wir uns diesen **Satz von Euler** und einen eleganten Beweis dafür an.

Der Satz von Euler spielt eine wichtige Rolle in der modernen Verschlüsselung.

Mehr dazu erfährst du am Arbeitsblatt – RSA-Verfahren.

**Eulersche Phi-Funktion**

Die **Eulersche Phi-Funktion** $\boldsymbol{\varphi}$ ist für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ definiert:
Es ist $\varphi(n)$ die Anzahl natürlicher Zahlen $a$, für die $1 \leq a \leq n$ und $\mathrm{ggT}(a,n) = 1$ gilt. Kurz:

$$\boldsymbol{\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a \leq n \wedge \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}|}$$

**Eulersche Phi-Funktion**

Ermittle die folgenden Funktionswerte der Eulerschen Phi-Funktion.

**1)** $\varphi(1) = 1$ **4)** $\varphi(4) = 2$ **7)** $\varphi(7) = 6$ **10)** $\varphi(10) = 4$

**2)** $\varphi(2) = 1$ **5)** $\varphi(5) = 4$ **8)** $\varphi(8) = 4$ **11)** $\varphi(11) = 10$

**3)** $\varphi(3) = 2$ **6)** $\varphi(6) = 2$ **9)** $\varphi(9) = 6$ **12)** $\varphi(12) = 4$

**Eulersche Phi-Funktion**

Es sind $p$ und $q$ verschiedene Primzahlen und $k \geq 1$.

**1)** Für welche natürlichen Zahlen $a$ mit $1 \leq a \leq p$ gilt $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$? Ermittle damit $\varphi(p)$.

$$1, 2, 3, \ldots, p-1 \implies \varphi(p) = p - 1$$

**2)** Für welche natürlichen Zahlen $a$ mit $1 \leq a \leq p^k$ gilt *nicht* $\mathrm{ggT}(a,p^k) = 1$? Ermittle damit $\varphi(p^k)$.

$$1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ 3 \cdot p \ldots, p^{k-1} \cdot p \implies \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1} \cdot (p-1)$$

**3)** Für welche natürlichen Zahlen $a$ mit $1 \leq a \leq p \cdot q$ gilt *nicht* $\mathrm{ggT}(a, p \cdot q) = 1$?
Ermittle damit $\varphi(p \cdot q)$ und zeige, dass $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ gilt.

Vielfache von $p$, die $\leq p \cdot q$ sind:

$$\underbrace{1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ 3 \cdot p,\ \ldots,\ (q-1) \cdot p,\ q \cdot p}_{q \text{ Zahlen}}$$

Vielfache von $q$, die $\leq p \cdot q$ sind:

$$\underbrace{1 \cdot q,\ 2 \cdot q,\ 3 \cdot q,\ \ldots,\ (p-1) \cdot q,\ p \cdot q}_{p \text{ Zahlen}}$$

$$\implies \varphi(p \cdot q) = p \cdot q - (p + q - 1) = (p-1) \cdot (q-1) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$$

**Multiplikativität der Eulerschen Phi-Funktion**

Tatsächlich ist die Eulersche Phi-Funktion für alle *teilerfremden* Zahlen $m$ und $n$ multiplikativ.

Aus $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ folgt also $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

**Primfaktorzerlegung von $n \rightsquigarrow \varphi(n)$**

Zerlege $n$ in Primfaktoren und berechne $\varphi(n)$.

**a)** $n = 42$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} \implies \varphi(42) &= \varphi(2) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(7) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 \end{aligned}$$

**b)** $n = 360$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} \implies \varphi(360) &= \varphi(2^3) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5) \\ &= 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96 \end{aligned}$$

**Satz von Euler (1736)**

Wenn $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ ist, dann gilt der **Satz von Euler**:

$$\boldsymbol{a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n}$$

Wenn $n$ eine Primzahl ist, dann ist das genau der Satz von Fermat.

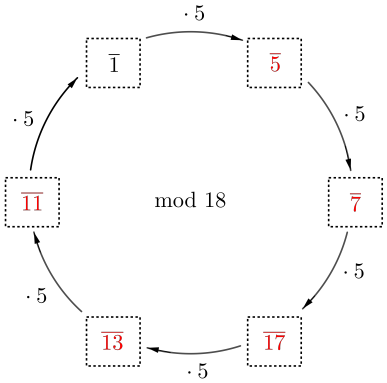
**Satz von Euler (Beweisidee)**

Die Zahlen $n=18$ und $a=5$ sind teilerfremd.

Die $\varphi(18)=6$ natürlichen Zahlen von 1 bis 18, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler mit 18 haben, sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17.

Beim Multiplizieren mit $a=5$ werden die entsprechenden Restklassen durchgetauscht. Trage rechts diese Restklassen in die Kästchen ein.

Es gilt also: $a^{\varphi(n)} = 5^{\varphi(18)} \equiv 1 \mod 18$




**Satz von Euler (Beweis)**

Mit dieser Idee beweisen wir jetzt $\boldsymbol{a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n}$ allgemein für alle Zahlen $a$ mit $\mathrm{ggT}(a,n)=1$.

Unter den Zahlen $\{1,2,3,\ldots,n\}$ gibt es $\varphi(n)$ verschiedene Zahlen, die zu $n$ teilerfremd sind.

Wir geben diesen $\varphi(n)$ verschiedenen Zahlen jeweils einen Namen: $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{\varphi(n)}\}$

Wir multiplizieren jede dieser Zahlen mit $a$.

Auf dem Arbeitsblatt – Euklidischer Algorithmus haben wir gezeigt, dass alle Zahlen, die in der gleichen Restklasse modulo $n$ sind, den gleichen größten gemeinsamen Teiler mit $n$ haben. Das Ergebnis $a_i \cdot a$ kann zwar größer als $n$ sein, aber muss wegen $\mathrm{ggT}(a_i \cdot a, n)=1$ wieder in einer der $\varphi(n)$ Restklassen liegen, deren Zahlen teilerfremd zu $n$ sind.

Außerdem liegen die Zahlen $a_1 \cdot a$, $a_2 \cdot a$, …, $a_{\varphi(n)} \cdot a$ alle in *verschiedenen* Restklassen modulo $n$, denn es folgt aus der Kürzungsregel für Kongruenzen:

$$a_i \cdot a \equiv a_j \cdot a \mod n \implies a_i \equiv a_j \mod n \implies a_i = a_j$$

Bei $n=18$ und $a=5$ entsteht beim Durchtauschen ein einziger Zyklus der Länge $\varphi(18)=6$.
In diesem Fall ist $\varphi(n)$ der *kleinste* Exponent, für den $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ gilt.
Es können aber auch mehrere Zyklen entstehen, deren Länge jeweils ein Teiler von $\varphi(n)$ ist. Probiere es mit $n=18$ und $a=7$ aus.

Die Multiplikation mit $a$ vertauscht jedenfalls nur die Reihenfolge der $\varphi(n)$ verschiedenen Restklassen.

$$\begin{aligned}
&\implies a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(n)} \equiv (a_1 \cdot a) \cdot (a_2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a_{\varphi(n)} \cdot a) \mod n \\
&\implies a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(n)} \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(n)} \cdot a^{\varphi(n)} \mod n \\
&\implies 1 \equiv a^{\varphi(n)} \mod n
\end{aligned}$$

**mod 100**

Ermittle mit dem Satz von Euler die Einerziffer und die Zehnerziffer von $23^{42}$.

$$n = 100 = 2^2 \cdot 5^2 \implies \varphi(100) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^2) = 2 \cdot 20 = 40$$

Aus dem Satz von Euler folgt also $a^{40} \equiv 1 \mod 100$ für alle Zahlen $a$ mit $\mathrm{ggT}(a,100)=1$.

$$\mathrm{ggT}(23,100)=1 \implies 23^{42} = \underbrace{23^2}_{=529} \cdot \underbrace{23^{40}}_{\equiv 1 \bmod 100} \equiv 529 \mod 100$$

Die beiden letzten Stellen von $23^{42}$ sind also 29.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at