

Erweiterungen der Zahlenbereiche



1) Die Gleichung $x + 4 = 0$ hat in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ keine Lösung.

Wir führen als Lösung dieser Gleichung die „neue“ Zahl ein.

Wir erweitern \mathbb{N} zum Zahlenbereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2) Die Gleichung $3 \cdot x = 2$ hat in den ganzen Zahlen \mathbb{Z} keine Lösung.

Wir führen als Lösung die „neue“ Zahl ein.

Wir erweitern \mathbb{Z} zum Zahlenbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. „Bruchzahlen“

3) Die Gleichung $x^2 = 2$ hat in den rationalen Zahlen \mathbb{Q} keine Lösung.

Wir führen als Lösung die „neue“ Zahl $\sqrt{2}$ ein.

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat dann die beiden Lösungen und .

Wir erweitern \mathbb{Q} um die irrationalen Zahlen zum Zahlenbereich der reellen Zahlen \mathbb{R} .

Als Dezimalzahlen haben irrationale Zahlen unendlich viele Nachkommastellen und sind nicht periodisch.

Zum Beispiel: $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ oder $\pi = 3,14159\dots$ Die reellen Zahlen sind genau alle Zahlen auf der Zahlengerade.

4) Erkläre, warum die Gleichung $x^2 = -1$ in den reellen Zahlen \mathbb{R} keine Lösung hat.

Wir brauchen also eine „neue“ Zahl.

Imaginäre Einheit



Die imaginäre Einheit i ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Es gilt also: $i^2 = i \cdot i = -1$

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat dann die beiden Lösungen i und $-i$.

Die imaginäre Einheit i ist keine reelle Zahl. Sie kann also nicht auf der Zahlengerade dargestellt werden.

Um sich i vorstellen zu können, erweitern wir die Zahlengerade zur Zahlenebene. Der Zahl i entspricht dann der Punkt $(0 \mid 1)$.

Komplexe Zahlen



Jede Zahl z der Form $z = a + b \cdot i$ mit reellen Zahlen a und b heißt komplexe Zahl.

Wir nennen a den Realteil von z und schreiben auch $a = \text{Re}(z)$.

Wir nennen b den Imaginärteil von z und schreiben auch $b = \text{Im}(z)$.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ abgekürzt. „Complex Numbers“

Komplexe Zahlen kommen zum Beispiel in der Elektrotechnik praktisch zum Einsatz.

Zur Unterscheidung von der elektrischen Stromstärke i wird die imaginäre Einheit deshalb auch oft mit j abgekürzt.

Zahlenebene



Um negative Zahlen grafisch darzustellen, haben wir den Zahlenstrahl zur Zahlengerade erweitert.

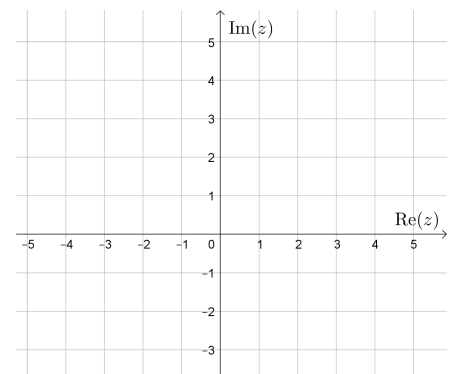
Um komplexe Zahlen grafisch darzustellen, erweitern wir die Zahlengerade zur Zahlenebene:

Jeder komplexen Zahl entspricht dann genau ein Punkt in der Zahlenebene und umgekehrt:

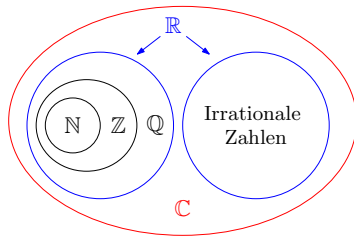
$$\text{Komplexe Zahl } a + b \cdot i \longleftrightarrow \text{Punkt } (a \mid b)$$

Zeichne die folgenden komplexen Zahlen rechts als Punkte ein.

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 1) $z_1 = 3 + 2 \cdot i$ | 4) $z_4 = -1 + 3 \cdot i$ | 7) $z_7 = 4$ |
| 2) $z_2 = 5 - 2 \cdot i$ | 5) $z_5 = -4 + 0,5 \cdot i$ | 8) $z_8 = 4 \cdot i$ |
| 3) $z_3 = -3 - i$ | 6) $z_6 = -1 - 2,5 \cdot i$ | 9) $z_9 = -i$ |



Die Erweiterungen der Zahlenbereiche sind im folgenden Mengendiagramm veranschaulicht:



In Mengenschreibweise gilt:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

- „Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.“
- „Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.“
- „Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.“
- „Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl.“

Kreuze jeweils genau jene Zahlenbereiche an, in denen die Zahl enthalten ist:

	N	Z	Q	R	C
42					
-3					
3,14					
$-4, \dot{2}$					
$\sqrt{3}$					
$\sqrt{9}$					
$\frac{8}{3}$					
$-\frac{30}{6}$					
$4 - 2 \cdot i$					
$-3,7\overline{25} = -3,725\ 252\ 5\dots$					
$\pi = 3,141\ 592\ 653\dots$					
$-2 \cdot i$					

Wir *rechnen* mit komplexen *Zahlen* genauso wie mit reellen Zahlen und Variablen. Die folgenden Rechenregeln gelten für alle komplexen Zahlen x, y und z :

- i) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativgesetze)
- ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ und $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativgesetze)
- iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivgesetz)


Zusätzlich beachten wir, dass $i^2 = -1$ für die imaginäre Einheit i gilt.

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 2 \cdot i$ und $z_2 = 3 - 5 \cdot i$.

- a) Stelle $z_1 + z_2$ in der Form $a + b \cdot i$ dar.
- b) Stelle $z_1 - z_2$ in der Form $a + b \cdot i$ dar.
- c) Stelle $z_1 \cdot z_2$ in der Form $a + b \cdot i$ dar.

d) Stelle $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + b \cdot i$ dar.

Hinweis: Um $\frac{a+b \cdot i}{c+d \cdot i}$ zu vereinfachen, multipliziere mit $\frac{\overbrace{c-d \cdot i}^{-1}}{c-d \cdot i}$.
Die Zahl $c - d \cdot i$ heißt **konjugiert komplexe Zahl** von $c + d \cdot i$.

Sinnlose Wurzelschreibweisen  **MmF**

In manchen Büchern wird die Schreibweise $\sqrt{-1} = i$ verwendet.

Mit dieser Schreibweise sind dann aber die Rechenregeln für Wurzeln nicht mehr alle gültig.

Für alle *nicht-negativen* reellen Zahlen a und b gilt nämlich: **i)** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ **ii)** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Erweitert man diese Rechenregeln auf *negative* Zahlen a , folgt daraus der Widerspruch $-1 = 1$:

$$-1 \stackrel{\text{i)}}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \stackrel{\text{ii)}}{=} \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Auch die Schreibweise $\sqrt{-1} = \pm i$ ist problematisch:

Ansonsten müsste konsequent auch $\sqrt{4} = \pm 2$ gelten, aber $\sqrt{4} = 2$ ist *eindeutig* definiert.

Wir vermeiden daher bewusst Schreibweisen wie $\sqrt{-1} = i$ oder $\sqrt{-1} = \pm i$.

$\pm\sqrt{-4}$  **MmF**

Berechne: $(2 \cdot i) \cdot (2 \cdot i) = \boxed{}$ $(-2 \cdot i) \cdot (-2 \cdot i) = \boxed{}$

Die Gleichung $z^2 = -4$ hat über der Grundmenge \mathbb{C} zwei Lösungen,

nämlich $z_1 = \boxed{}$ und $z_2 = \boxed{}$. Die beiden Lösungen unterscheiden sich also nur um das Vorzeichen.

Es gilt also: $z^2 = -4 \iff z = \pm 2 \cdot i$

Allgemein vereinbaren wir, dass $\pm\sqrt{-a} = \pm i \cdot \sqrt{a}$ für alle $a \geq 0$ gilt.

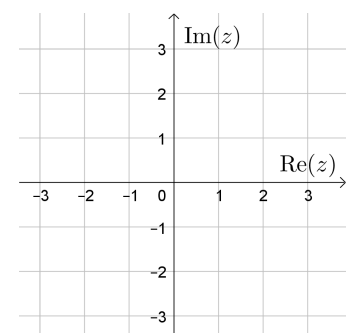
Mit dieser Vereinbarung können wir die Lösungen solcher Gleichungen berechnen:

$$z^2 = -4 \iff z = \pm\sqrt{-4} = \pm i \cdot \sqrt{4} = \pm 2 \cdot i$$

Quadratische Gleichung  **MmF**

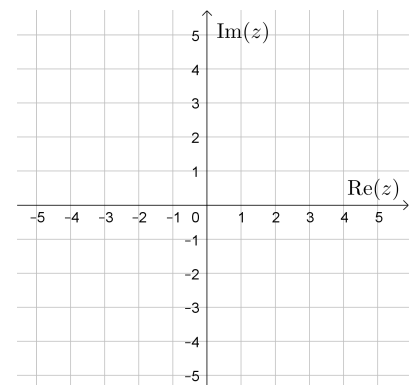
Berechne die Lösungen der **quadratischen Gleichung** $z^2 + 4 \cdot z + 13 = 0$ über der Grundmenge \mathbb{C} .


Zeichne die beiden Lösungen in der Zahlenebene rechts unten ein.



Allgemein gilt für jede **Polynomgleichung** mit *reellen* Koeffizienten:
 Wenn $a + b \cdot i$ eine Lösung der Polynomgleichung ist, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl $a - b \cdot i$ eine Lösung dieser Gleichung.

Berechne die Lösungen der Polynomgleichung $2 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 + 58 \cdot z = 0$ über der Grundmenge \mathbb{C} .
 Zeichne die drei Lösungen in der Zahlenebene rechts unten ein.



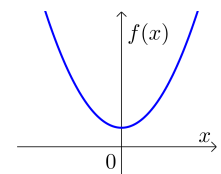
Fundamentalsatz der Algebra 

Jede **Polynomfunktion** f vom Grad n hat *genau* n Nullstellen, wenn man Folgendes beachtet:

- 1) Nullstellen können auch nicht-reelle Zahlen sein. Zum Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 1$$

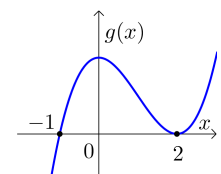
Die komplexen Zahlen $x_1 = i$ und $x_2 = -i$ sind die Nullstellen dieser Polynomfunktion f vom Grad 2.



- 2) Nullstellen können auch mehrfach auftreten. Zum Beispiel:

$$g(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass $x_1 = -1$ und $x_2 = x_3 = 2$ die Nullstellen dieser Polynomfunktion g vom Grad 3 sind.



Dabei ist die Zahl -1 eine einfache Nullstelle und die Zahl 2 eine doppelte Nullstelle.

Allgemein hat jede Polynomfunktion vom Grad n

$$h(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad \text{mit } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$$

genau n Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, wenn man mehrfache Nullstellen entsprechend oft anschreibt.

Die Funktion h hat dann die folgende Linearfaktorform:

$$h(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Mehr zum Lösen spezieller Polynomgleichungen über der Grundmenge \mathbb{R} findest du am [Arbeitsblatt – Polynomfunktionen](#).

Mehr zum Lösen spezieller Polynomgleichungen über der Grundmenge \mathbb{C} findest du am [Arbeitsblatt – Polarform](#).