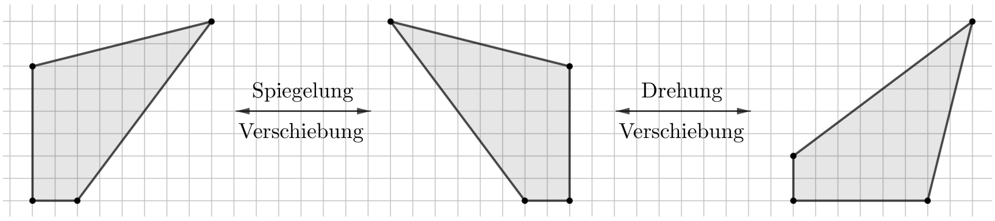
Kongruenz

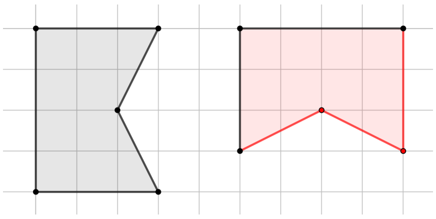
Die unten dargestellten Vierecke können durch eine Abfolge von **Verschiebungen**, **Spiegelungen** und **Drehungen** ineinander übergeführt werden:



Wenn du die Vierecke *perfekt* ausschneidest, dann passen sie alle *exakt* aufeinander.

Genau in so einem Fall sagen wir: Die Figuren sind zueinander **kongruent** bzw. **deckungsgleich**.

Kongruenz



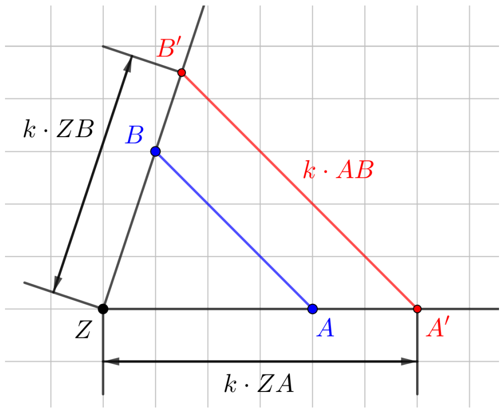
Links ist ein Fünfeck dargestellt.

Zeichne rechts daneben ein dazu kongruentes Fünfeck ein.

Verwende dafür die beiden bereits eingezeichneten Seiten.

Zentrische Skalierung

Rechts ist die **zentrische Skalierung** mit dem **Zentrum Z** und dem **Skalierungsfaktor $k = \frac{3}{2}$** dargestellt.



Die zentrische Skalierung bildet jeden Punkt A auf jenen Punkt A' ab, der auf dem Strahl ZA liegt und $ZA' = k \cdot ZA$ erfüllt.

Wenn $k > 1$ gilt, sprechen wir auch von **zentrischer Streckung**.
Wenn $0 < k < 1$ gilt, sprechen wir auch von **zentrischer Stauchung**.

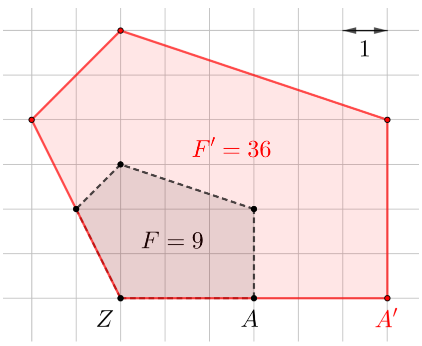
Aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung folgen die nachstehenden Eigenschaften zentrischer Streckungen:

1) Jede Strecke AB wird auf eine zu ihr parallele Strecke $A'B'$ mit k-facher Länge abgebildet.

2) Die Größe von Winkeln bleibt gleich.

3) Jedes Vieleck wird auf ein Vieleck mit k^2-fachem Flächeninhalt abgebildet.

Zentrische Skalierung



Links ist ein Fünfeck strichliert dargestellt.

Ausgehend vom Eckpunkt Z wird das Fünfeck mit dem Skalierungsfaktor k zentrisch gestreckt.

1) Lies den Skalierungsfaktor aus der Grafik ab: $k = 2$

2) Vervollständige das vergrößerte Fünfeck.

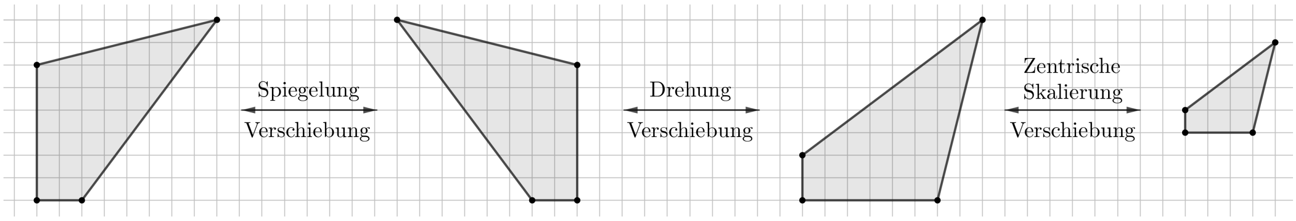
3) Ermittle die Flächeninhalte der beiden Fünfecke.

$F = 6 + 1 + 0{,}5 + 1{,}5 = 9$ (Rechteck und 3 rechtwinkelige Dreiecke)

$F' = k^2 \cdot F = 4 \cdot 9 = 36$

Ähnlichkeit

Die unten dargestellten Vierecke können durch eine Abfolge von **Verschiebungen**, **Spiegelungen**, **Drehungen** und **zentrischen Skalierungen** ineinander übergeführt werden.

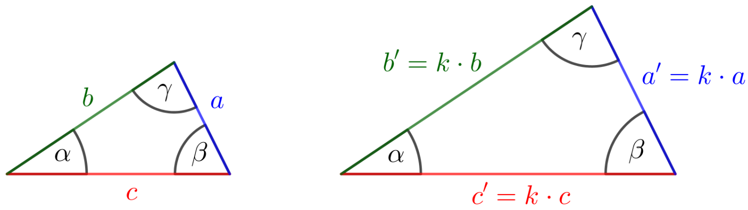


Genau in so einem Fall sagen wir: Die Figuren sind zueinander **ähnlich**.

Ähnlichkeit von Dreiecken

Die beiden rechts unten dargestellten Dreiecke stimmen in ihren Winkeln paarweise überein.
Aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung folgt, dass die Dreiecke zueinander ähnlich sind.
In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

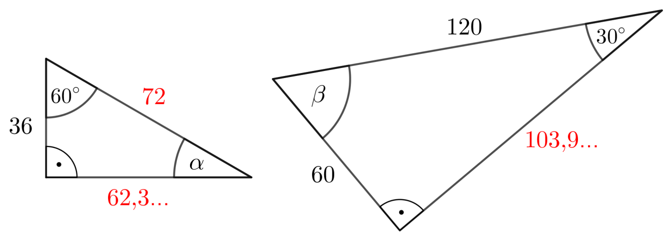


Ähnlichkeit von Dreiecken

1) Begründe, warum die beiden dargestellten Dreiecke zueinander ähnlich sind.

$\alpha = 180° - 90° - 60° = 30°$
$\beta = 180° - 90° - 30° = 60°$

Die Dreiecke haben also beide die Winkel 30°, 60°, 90° und sind damit zueinander ähnlich.



2) Berechne die fehlenden Seitenlängen und trage sie oben in die Kästchen ein. (Längen in mm)

$\sqrt{120^2 - 60^2} = 103{,}9\ldots\,\text{mm}$

$\frac{103{,}9\ldots}{x} = \frac{60}{36} \iff x = \frac{36 \cdot 103{,}9\ldots}{60} = 62{,}3\ldots\,\text{mm}$

Oder: Skalierungsfaktor $k = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$

$x \cdot \frac{5}{3} = 103{,}9\ldots \iff x = 62{,}3\ldots\,\text{mm}$

3) Berechne die Flächeninhalte der beiden Dreiecke.

Linkes Dreieck: $A_1 = \frac{36 \cdot 62{,}3\ldots}{2} = 1122{,}3\ldots\,\text{mm}^2$

Rechtes Dreieck: $A_2 = \frac{60 \cdot 103{,}9\ldots}{2} = 3117{,}6\ldots\,\text{mm}^2$