Teilbarkeit ganzer Zahlen

a und b sind ganze Zahlen, wobei a nicht 0 ist. Kurz: $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$

- Gibt es eine ganze Zahl k mit $\boldsymbol{b = a \cdot k}$, dann nennen wir a einen **Teiler** von b.
  Bei der ganzzahligen Division $b : a = k$ bleibt also *kein* Rest. Wir schreiben dafür kurz: $\boldsymbol{a \mid b}$
- Gibt es *keine* solche ganze Zahl k, dann schreiben wir $a \nmid b$.

Teilbarkeit ganzer Zahlen

Entscheide jeweils, ob $\mid$ oder $\nmid$ stimmt: **a)** $4 \mid -24$ **b)** $-5 \mid 20$ **c)** $6 \nmid -3$ **d)** $-3 \mid -15$ **e)** $2 \mid 0$

Vielfache & Restklassen

Die **Vielfachen** einer ganzen Zahl m sind alle Zahlen der Form $m \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Zum Beispiel: Die ganze Zahl 3 hat die Vielfachen $\{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

...													
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Dividieren wir eine natürliche Zahl ganzzahlig durch 3, bleibt entweder 0 Rest oder 1 Rest oder 2 Rest.

- Die Zahlenmenge $\overline{0} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$ ist die **Restklasse 0 modulo 3**.
  Jede Zahl in der Restklasse 0 können wir in der Form $3 \cdot k + 0$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben.
- Die Zahlenmenge $\overline{1} = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$ ist die **Restklasse 1 modulo 3**.
  Jede Zahl in der Restklasse 1 können wir in der Form $3 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben.
- Die Zahlenmenge $\overline{2} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$ ist die **Restklasse 2 modulo 3**.
  Jede Zahl in der Restklasse 2 können wir in der Form $3 \cdot k + 2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben.

Kongruenz

Wenn zwei Zahlen a und b in der gleichen Restklasse modulo m liegen, dann ...

... sagen wir: „a und b sind **kongruent** modulo m“ bzw. „a ist **kongruent** zu b modulo m“

... schreiben wir: $\boldsymbol{a \equiv b \mod m}$ Der Ausdruck $a \equiv b \mod m$ ist keine Gleichung, sondern eine **Kongruenz**.

Zum Beispiel:

...												
	$\equiv 1$	$\equiv 2$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 2$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 2$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 2$	mod 3
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	

$3 \equiv 0 \mod 3$
$-5 \equiv 1 \mod 3$
$5 \equiv 2 \mod 3$
$-4 \equiv 5 \mod 3$

Kongruenz

Trage in die Kästchen jene Zahl aus $R = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ ein,
zu der die Zahl modulo m kongruent ist.

a) $m = 2$, $R = \{0, 1\}$

...												
	$\equiv 1$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	mod 2
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	

b) $m = 5$, $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

...												
	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 2$	$\equiv 3$	$\equiv 4$	$\equiv 0$	$\equiv 1$	$\equiv 2$	$\equiv 3$	$\equiv 4$	$\equiv 0$	mod 5
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	

Kongruenz?

Entscheide, ob die Zahlen kongruent ($\equiv$) oder nicht kongruent ($\not\equiv$) sind.

a) $27 \equiv 42 \mod 5$ **b)** $-3 \equiv 39 \mod 7$ **c)** $981273 \not\equiv 48276 \mod 2$ **d)** $846 \equiv 14322 \mod 3$

Äquivalente Aussagen

Zwei Zahlen a und b liegen genau dann in der gleichen Restklasse modulo m,
wenn $a = b + k \cdot m$ mit einer passenden ganzen Zahl k gilt. a und b unterscheiden sich um ein Vielfaches von m.
Erkläre damit die folgende Aussage:

$$\boldsymbol{a \equiv b \mod m \iff m \mid a - b}$$

a und b liegen genau dann in der gleichen Restklasse modulo m, wenn m ein Teiler von $a - b$ ist.

$$a \equiv b \mod m \iff a = b + k \cdot m \iff a - b = k \cdot m \iff m \mid a - b$$

Rechenregeln für Kongruenzen

Erkläre die folgenden Rechenregeln für Kongruenzen:

1) Wir dürfen Kongruenzen modulo m addieren:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \mod m \\ a_2 \equiv b_2 \mod m \end{array}\right\} \implies a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \mod m$$

2) Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz mit der gleichen ganzen Zahl multiplizieren:

$$a \equiv b \mod m \implies a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m$$

3) Wir dürfen Kongruenzen modulo m multiplizieren:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \mod m \\ a_2 \equiv b_2 \mod m \end{array}\right\} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \mod m$$

1) $$\left.\begin{array}{l} a_1 - b_1 = k_1 \cdot m \\ a_2 - b_2 = k_2 \cdot m \end{array}\right\} \implies (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot m \implies a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \mod m \checkmark$$

2) $$m \mid a - b \implies m \mid \underbrace{(a - b) \cdot c}_{a \cdot c - b \cdot c} \checkmark$$

3) $$\left.\begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \mod m \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot a_2 \mod m \\ a_2 \equiv b_2 \mod m \implies b_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \mod m \end{array}\right\} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \mod m$$

Division

Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz *nicht* einfach durch einen gemeinsamen Teiler dividieren.
Zum Beispiel gilt $\underbrace{18}_{=3\cdot 6} \equiv \underbrace{30}_{=5\cdot 6} \mod 4$, aber $3 \not\equiv 5 \mod 4$.

Die richtige Rechenregel zum Kürzen gemeinsamer Teiler ist am Ende des Arbeitsblatts.

Division mit Rest

Gegeben sind zwei ganze Zahlen z und m, zum Beispiel $z = 208$ und $m = 12$.
Gesucht ist jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, für die $z \equiv r \mod m$ gilt.

1) Wir führen die Division mit Rest $z : m$ durch:

$$208 : 12 = 17 + \frac{4}{12}$$

„Wie oft geht 12 in 208? 17 Mal, 4 Rest"

2) Wir multiplizieren die Gleichung mit m:

$$208 = 17 \cdot 12 + 4$$

3) Aus den Rechenregeln für Kongruenzen folgt, dass der Rest $r = 4$ die gesuchte Zahl ist:

$$208 = \underbrace{17 \cdot 12}_{\equiv 0 \text{ mod } 12} + 4 \implies 208 \equiv 4 \mod 12$$

Division mit Rest

Ermittle jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, für die $z \equiv r \mod m$ gilt.

a) $42 = 5 \cdot 8 + 2 \implies 42 \equiv 2 \mod 8$

b) $96 = 13 \cdot 7 + 5 \implies 96 \equiv 5 \mod 7$

c) $129 = 64 \cdot 2 + 1 \implies 129 \equiv 1 \mod 2$

d) $358 = 59 \cdot 6 + 4 \implies 358 \equiv 4 \mod 6$

Einerziffer entscheidet

a) *„Jede natürliche Zahl ist modulo* 10 *in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer."*
Wir erklären die Aussage anhand der Zahl $4723 = 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 100 \cdot 10}_{\equiv 0 \text{ mod } 10} + \underbrace{7 \cdot 10 \cdot 10}_{\equiv 0 \text{ mod } 10} + \underbrace{2 \cdot 10}_{\equiv 0 \text{ mod } 10} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \text{ mod } 10} \equiv 3 \mod 10$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 ist.

b) *„Jede natürliche Zahl ist modulo* 5 *in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer."*
Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 200 \cdot 5}_{\equiv 0 \text{ mod } 5} + \underbrace{7 \cdot 20 \cdot 5}_{\equiv 0 \text{ mod } 5} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 5}_{\equiv 0 \text{ mod } 5} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \text{ mod } 5} \equiv 3 \mod 5$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 oder 5 ist.

c) *„Jede natürliche Zahl ist modulo* 2 *in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer."*
Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 500 \cdot 2}_{\equiv 0 \text{ mod } 2} + \underbrace{7 \cdot 50 \cdot 2}_{\equiv 0 \text{ mod } 2} + \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 2}_{\equiv 0 \text{ mod } 2} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \text{ mod } 2} \equiv 3 \mod 2$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

Ziffernsumme entscheidet

a) *„Jede natürliche Zahl ist modulo 9 in der gleichen Restklasse wie ihre Ziffernsumme.“*
Wir erklären die Aussage anhand der Zahl $4723 = 4 \cdot (999+1) + 7 \cdot (99+1) + 2 \cdot (9+1) + 3 \cdot 1$:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 9 \cdot 111}_{\equiv 0 \text{ mod } 9} + \mathbf{4} + \underbrace{7 \cdot 9 \cdot 11}_{\equiv 0 \text{ mod } 9} + \mathbf{7} + \underbrace{2 \cdot 9 \cdot 1}_{\equiv 0 \text{ mod } 9} + \mathbf{2} + \mathbf{3} \cdot 1 \equiv \mathbf{4+7+2+3} \mod 9$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme es ist.

b) *„Jede natürliche Zahl ist modulo 3 in der gleichen Restklasse wie ihre Ziffernsumme.“*
Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 333}_{\equiv 0 \text{ mod } 3} + \mathbf{4} + \underbrace{7 \cdot 3 \cdot 33}_{\equiv 0 \text{ mod } 3} + \mathbf{7} + \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}_{\equiv 0 \text{ mod } 3} + \mathbf{2} + \mathbf{3} \equiv \mathbf{4+7+2+3} \mod 3$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme es ist.

Addition und Multiplikation modulo 4

1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 4 aus.

Rest von (□+□) : 4				
+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Rest von (□·□) : 4				
·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

2) Ermittle jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, 3\}$, für die $23 \equiv r \mod 4$ gilt.

$$23 = 5 \cdot 4 + 3 \implies 23 \equiv 3 \mod 4$$

Ermittle jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, 3\}$, für die $42 \equiv r \mod 4$ gilt.

$$42 = 10 \cdot 4 + 2 \implies 42 \equiv 2 \mod 4$$

3) Berechne $23 + 42 \mod 4$ und $23 \cdot 42 \mod 4$.

$$23 + 42 \equiv 3 + 2 \equiv 1 \mod 4 \qquad 23 \cdot 42 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 2 \mod 4$$

4) Wie viele Lösungen hat die Kongruenz $2 \cdot x \equiv 2 \mod 4$ über der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3\}$?
2 Lösungen: $x = 1$ und $x = 3$

5) Wie viele Lösungen hat die Kongruenz $2 \cdot x \equiv 1 \mod 4$ über der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3\}$?
Keine Lösung.

Addition und Multiplikation modulo 5

1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 5 aus.

Rest von ($\square + \square$) : 5					
+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Rest von ($\square \cdot \square$) : 5					
$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2) Was fällt dir in der Tabelle zum Multiplizieren auf?
Ab der zweiten Zeile enthält jede Zeile alle Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ genau einmal.

3) a und b sind jeweils Zahlen aus $\{1, 2, 3, 4\}$.
Wie viele Lösungen hat die Kongruenz $a \cdot x \equiv b \mod 5$ über der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?
Genau eine Lösung.

Addition und Multiplikation modulo 6

1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 6 aus.

Rest von ($\square + \square$) : 6						
+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Rest von ($\square \cdot \square$) : 6						
$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

2) Welche Zeilen in der Multiplikations-Tabelle enthalten alle Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ genau einmal?
Es gibt einen Zusammenhang mit dem Divisor 6. Hast du eine Vermutung?
Die Zeile $1 \cdot x$ und die Zeile $5 \cdot x$.
1 und 5 sind genau die Zahlen aus $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, die zu 6 teilerfremd sind.

Kürzungsregel für Kongruenzen

Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz modulo m durch einen gemeinsamen Teiler c dividieren. Bei der neuen Kongruenz müssen wir aber modulo $\frac{m}{\operatorname{ggT}(c,m)}$ rechnen:

$$\boldsymbol{a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m \overset{(\star)}{\iff} a \equiv b \mod \frac{m}{\operatorname{ggT}(c,m)}}$$

Zum Beispiel: $\underbrace{18}_{=3\cdot 6} \equiv \underbrace{30}_{=5\cdot 6} \mod 4 \iff 3 \equiv 5 \mod 2$, weil $\operatorname{ggT}(6,4) = 2$.

Am Arbeitsblatt – Fundamentalsatz der Arithmetik haben wir $m \mid c \cdot N \iff \frac{m}{\operatorname{ggT}(c,m)} \mid N$ gezeigt.
Damit können wir $(\star)$ begründen:

$$\begin{aligned} a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m &\iff \underbrace{a \cdot c - b \cdot c}_{c\cdot(a-b)} \equiv 0 \mod m \iff \\ &\iff m \mid c \cdot (a-b) \iff \\ &\iff \frac{m}{\operatorname{ggT}(c,m)} \mid a - b \iff \\ &\iff a - b \equiv 0 \mod \frac{m}{\operatorname{ggT}(c,m)} \iff \\ &\iff a \equiv b \mod \frac{m}{\operatorname{ggT}(c,m)} \end{aligned}$$

Addition und Multiplikation modulo 7

1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 7 aus.

Rest von ($\square + \square$) : 7							
$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Rest von ($\square \cdot \square$) : 7							
$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

2) c ist eine Zahl aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Die Spalte $x \cdot c \mod 7$ enthält jede der Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ genau einmal.
Begründe, warum das aus der Kürzungsregel für Kongruenzen folgt.
7 ist eine Primzahl, also gilt $\operatorname{ggT}(c, 7) = 1$.
Aus $a \cdot c \equiv b \cdot c \mod 7$ folgt mit der Kürzungsregel $a \equiv b \mod 7$.
Die Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sind in verschiedenen Restklassen modulo 7.
Also müssen $0 \cdot c$, $1 \cdot c$, $2 \cdot c$, …, $6 \cdot c$ in verschiedenen Restklassen modulo 7 sein.