

Teilbarkeit ganzer Zahlen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

a und b sind ganze Zahlen mit $a \neq 0$.

Gibt es eine ganze Zahl k mit $b = a \cdot k$, dann nennen wir a einen **Teiler** von b .

Wir schreiben dafür kurz $a \mid b$.

Gibt es *keine* solche ganze Zahl k , dann schreiben wir $a \nmid b$.

Bei der Division $b : a = k$ bleibt also kein Rest.

$a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$

Teilbarkeit ganzer Zahlen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Entscheide jeweils, ob \mid oder \nmid stimmt: a) $4 \square -24$ b) $-5 \square 20$ c) $6 \square -3$ d) $-3 \square -15$ e) $2 \square 0$

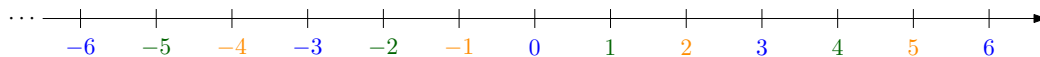
Vielfache & Restklassen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die **Vielfachen** einer ganzen Zahl m sind alle Zahlen der Form $m \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zum Beispiel: Die ganze Zahl 3 hat die Vielfachen $\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$.



Dividiert man ein Vielfaches von 3 durch 3, dann bleibt 0 Rest. Wir sagen auch:

Die Zahlenmenge $\bar{0} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ ist die **Restklasse 0 modulo 3**.

Jede Zahl in der Restklasse 0 können wir in der Form $3 \cdot k + 0$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben.

Die Zahlenmenge $\bar{1} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$ ist die **Restklasse 1 modulo 3**.

Jede Zahl in der Restklasse 1 können wir in der Form $3 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben.

Die Zahlenmenge $\bar{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$ ist die **Restklasse 2 modulo 3**.

Jede Zahl in der Restklasse 2 können wir in der Form $3 \cdot k + 2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben.

Jede Zahl einer Restklasse heißt auch **Repräsentant** dieser Restklasse.

Meistens verwenden wir die m Zahlen $0, 1, 2, \dots, m - 1$ als Repräsentanten ihrer Restklassen modulo m .

Kongruenz



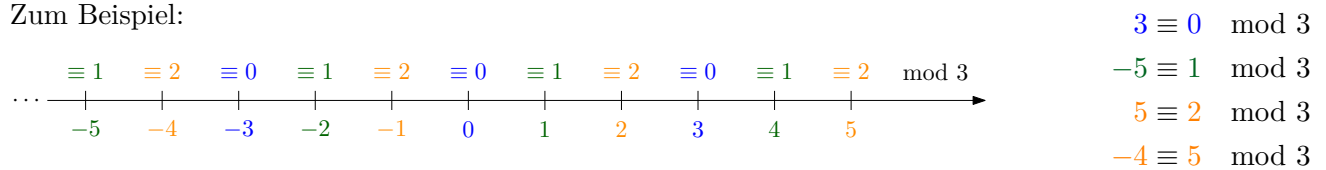
MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Zwei Zahlen a und b liegen in der gleichen Restklasse modulo m .

Dann sagen wir: „ a und b sind **kongruent** modulo m “ bzw. „ a ist **kongruent** zu b modulo m “

Dann schreiben wir kurz: $a \equiv b \pmod{m}$ Der Ausdruck $a \equiv b \pmod{m}$ ist keine Gleichung, sondern eine **Kongruenz**.

Zum Beispiel:



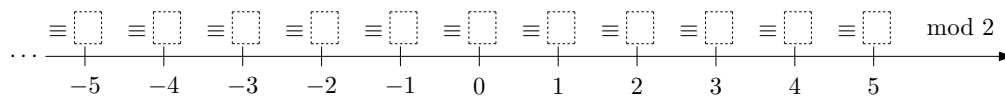
Kongruenz



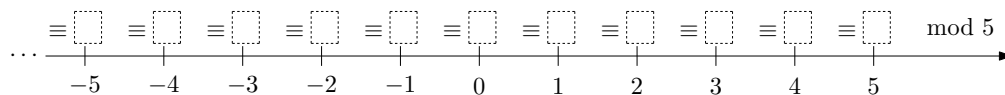
MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Fülle in die Lücke jeweils jene Zahl aus $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, zu der die Zahl modulo m kongruent ist.

a) $m = 2$



b) $m = 5$



Kongruenz?



MATHEMATIK

macht

FREU(N)DE

Entscheide, ob die Zahlen kongruent (\equiv) oder nicht kongruent ($\not\equiv$) sind.

- a) $27 \square 42 \pmod{5}$ b) $-3 \square 39 \pmod{7}$ c) $981273 \square 48276 \pmod{2}$ d) $846 \square 14322 \pmod{3}$

Äquivalente Aussagen



MATHEMATIK

macht

FREU(N)DE

Zwei Zahlen a und b liegen genau dann in der gleichen Restklasse modulo m , wenn $a = b + k \cdot m$ mit einer passenden ganzen Zahl k gilt. a und b unterscheiden sich um ein Vielfaches von m . Erkläre damit die folgende Aussage:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$$

a und b liegen genau dann in der gleichen Restklasse modulo m , wenn m ein Teiler von $a - b$ ist.

Rechenregeln für Kongruenzen



MATHEMATIK

macht

FREU(N)DE

Erkläre die folgenden Rechenregeln für Kongruenzen:

$$1) \left. \begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \end{array} \right\} \implies a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$$

Wir dürfen zwei Kongruenzen modulo m addieren.

$$2) a \equiv b \pmod{m} \implies a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$$

Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz mit der gleichen ganzen Zahl multiplizieren.

$$3) \left. \begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \end{array} \right\} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$$

Wir dürfen zwei Kongruenzen modulo m multiplizieren.

Division



MATHEMATIK

macht

FREU(N)DE

Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz *nicht* einfach durch einen gemeinsamen Teiler dividieren.

Zum Beispiel: $\underbrace{18}_{=3 \cdot 6} \equiv \underbrace{30}_{=5 \cdot 6} \pmod{4}$, aber $3 \not\equiv 5 \pmod{4}$.

Die richtige Rechenregel zum Kürzen gemeinsamer Teiler ist am Ende des Arbeitsblatts.

Division mit Rest



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Gegeben sind zwei ganze Zahlen z und m .

Gesucht ist jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, für die $z \equiv r \pmod{m}$ gilt.

Zum Beispiel: $z = 208, m = 12$

1) Wir führen die Division mit Rest $z : m$ durch.

$$208 : 12 = 17 + \frac{4}{12}$$

„Wie oft geht 12 in 208? 17 Mal, 4 Rest“

2) Wir multiplizieren die Gleichung mit m .

$$208 = 17 \cdot 12 + 4$$

3) Aus den Rechenregeln für Kongruenzen folgt, dass der Rest $r = 4$ die gesuchte Zahl ist.

$$208 = \underbrace{17 \cdot 12}_{\equiv 0 \pmod{12}} + 4 \implies 208 \equiv 4 \pmod{12}$$

Division mit Rest



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, für die $z \equiv r \pmod{m}$ gilt, und fülle die Lücken aus.

a) $42 = \underline{\quad} \cdot 8 + \underline{\quad} \implies 42 \equiv \underline{\quad} \pmod{8}$ c) $129 = \underline{\quad} \cdot 2 + \underline{\quad} \implies 129 \equiv \underline{\quad} \pmod{2}$

b) $96 = \underline{\quad} \cdot 7 + \underline{\quad} \implies 96 \equiv \underline{\quad} \pmod{7}$ d) $358 = \underline{\quad} \cdot 6 + \underline{\quad} \implies 358 \equiv \underline{\quad} \pmod{6}$

Einerziffer entscheidet



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

a) „Jede natürliche Zahl ist modulo 10 in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer.“

Wir erklären die Aussage anhand der Zahl $4723 = 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 100 \cdot 10}_{\equiv 0 \pmod{10}} + \underbrace{7 \cdot 10 \cdot 10}_{\equiv 0 \pmod{10}} + \underbrace{2 \cdot 10}_{\equiv 0 \pmod{10}} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \pmod{10}} \equiv 3 \pmod{10}$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Einerziffer $\underline{\quad}$ ist.

b) „Jede natürliche Zahl ist modulo 5 in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer.“

Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 =$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Einerziffer $\underline{\quad}$ oder $\underline{\quad}$ ist.

c) „Jede natürliche Zahl ist modulo 2 in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer.“

Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 =$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerziffer $\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad},$
 $\underline{\quad}$ oder $\underline{\quad}$ ist.

a) „Jede natürliche Zahl ist modulo 9 in der gleichen Restklasse wie ihre Ziffernsumme.“

Wir erklären die Aussage anhand der Zahl $4723 = 4 \cdot (999 + 1) + 7 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 3 \cdot 1$:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 9 \cdot 111}_{\equiv 0 \pmod 9} + \underbrace{4}_{\equiv 4 \pmod 9} + \underbrace{7 \cdot 9 \cdot 11}_{\equiv 0 \pmod 9} + \underbrace{7}_{\equiv 7 \pmod 9} + \underbrace{2 \cdot 9 \cdot 1}_{\equiv 0 \pmod 9} + \underbrace{2}_{\equiv 2 \pmod 9} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \pmod 9} \equiv 4 + 7 + 2 + 3 \pmod 9$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.

b) „Jede natürliche Zahl ist modulo 3 in der gleichen Restklasse wie ihre Ziffernsumme.“

Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 =$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.



1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 4 aus.

Rest von $(\square + \square) : 4$				
+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Rest von $(\square \cdot \square) : 4$				
·	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

2) Ermittle jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, 3\}$, für die $23 \equiv r \pmod 4$ gilt, und fülle die Lücken aus.

$$23 = \underline{\quad} \cdot 4 + \underline{\quad} \implies 23 \equiv \underline{\quad} \pmod 4$$

Ermittle jene Zahl r aus $\{0, 1, 2, 3\}$, für die $42 \equiv r \pmod 4$ gilt, und fülle die Lücken aus.

$$42 = \underline{\quad} \cdot 4 + \underline{\quad} \implies 42 \equiv \underline{\quad} \pmod 4$$

3) Berechne $23 + 42 \pmod 4$ und $23 \cdot 42 \pmod 4$.

$$23 + 42 \equiv \underline{\quad} + \underline{\quad} \equiv \underline{\quad} \pmod 4 \qquad 23 \cdot 42 \equiv \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \equiv \underline{\quad} \pmod 4$$

4) Wie viele Lösungen hat die Kongruenz $2 \cdot x \equiv 2 \pmod 4$ über der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3\}$?

5) Wie viele Lösungen hat die Kongruenz $2 \cdot x \equiv 1 \pmod 4$ über der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3\}$?



1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 5 aus.

Rest von $(\square + \square) : 5$					
+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Rest von $(\square \cdot \square) : 5$					
·	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

2) Was fällt dir in der Tabelle zum Multiplizieren auf?

3) a und b sind jeweils Zahlen aus $\{1, 2, 3, 4\}$.

Wie viele Lösungen hat die Kongruenz $a \cdot x \equiv b \pmod{5}$ über der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?



1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 6 aus.

Rest von $(\square + \square) : 6$						
+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Rest von $(\square \cdot \square) : 6$						
·	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

2) Welche Zeilen in der Multiplikations-Tabelle enthalten alle Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ genau einmal?

Es gibt einen Zusammenhang mit dem Divisor 6. Hast du eine Vermutung?



Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz modulo m durch einen gemeinsamen Teiler c dividieren. Bei der neuen Kongruenz müssen wir aber modulo $\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}$ rechnen:

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m \stackrel{(*)}{\iff} a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}}$$

Zum Beispiel: $\underbrace{18}_{=3 \cdot 6} \equiv \underbrace{30}_{=5 \cdot 6} \pmod 4 \iff 3 \equiv 5 \pmod 2$, weil $\text{ggT}(6,4) = 2$.

Auf dem **AB – Fundamentalsatz der Arithmetik** haben wir $m \mid c \cdot N \iff \frac{m}{\text{ggT}(c,m)} \mid N$ gezeigt. Damit können wir $(*)$ begründen:

$$\begin{aligned} a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m &\iff \underbrace{a \cdot c - b \cdot c}_{c \cdot (a-b)} \equiv 0 \pmod m \iff \\ &\iff m \mid c \cdot (a-b) \stackrel{N=a-b}{\iff} \\ &\iff \frac{m}{\text{ggT}(c,m)} \mid a-b \iff \\ &\iff a-b \equiv 0 \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}} \iff \\ &\iff a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}} \end{aligned}$$



1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 7 aus.

Rest von $(\square + \square) : 7$							
+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Rest von $(\square \cdot \square) : 7$							
·	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

2) c ist eine Zahl aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Die Spalte $x \cdot c \pmod 7$ enthält jede der Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ genau einmal. Begründe, warum das aus der Rechenregel für die Division folgt.