



Für die **Kostenfunktion** K gilt:

$$K(x) = 0,0015 \cdot x^3 - 0,09 \cdot x^2 + 2,45 \cdot x + 15$$

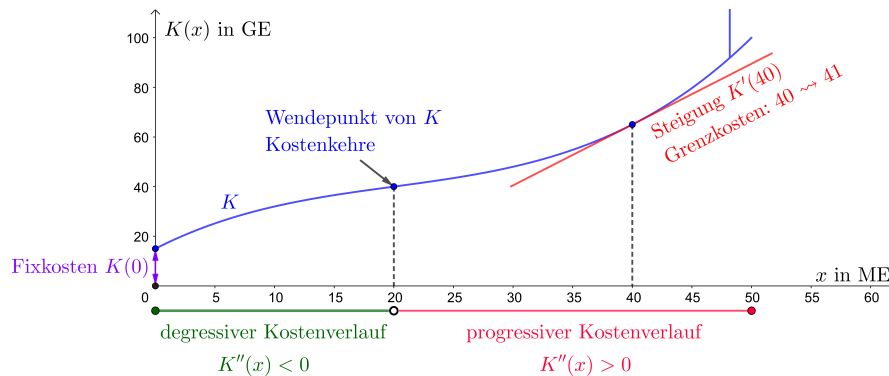
x ... produzierte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Zum Beispiel: 1 ME = 1 Stück oder 1 ME = 10 Paletten

$K(x)$... Produktionskosten in Geldeinheiten (GE)

Zum Beispiel: 1 GE = 1 € oder 1 GE = 42 Millionen \$

Der Graph der Kostenfunktion K ist im Intervall $[0; 50]$ dargestellt:



- Der Funktionswert $K(0)$ gibt die **Fixkosten** an. Zum Beispiel: Miete, Gehälter
- Die 1. **Ableitungsfunktion** K' nennt man in diesem Zusammenhang auch **Grenzkostenfunktion**.
Der Funktionswert $K'(40)$ gibt an, um wieviele GE die Produktionskosten **ungefähr** steigen, wenn statt 40 ME eine zusätzliche ME produziert wird.
- Die 2. **Ableitungsfunktion** K'' beschreibt den sogenannten Kostenverlauf:
 - Bei einem **degressiven Kostenverlauf** gilt: $K''(x) < 0$
 - Bei einem **progressiven Kostenverlauf** gilt: $K''(x) > 0$
 - Im Wendepunkt von K wechselt die Kostenfunktion ihr Krümmungsverhalten.
In dieser sogenannten **Kostenkehre** gilt also: $K''(x) = 0$
In der dargestellten Kostenkehre sind die Grenzkosten K' minimal.
- Für die **Stückkostenfunktion** (**Durchschnittskostenfunktion**) $\bar{K}$ gilt: $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$

- 1) Ermittle die Fixkosten, und interpretiere das Ergebnis.
- 2) Ermittle die Grenzkosten bei einer Produktion von 40 ME, und interpretiere das Ergebnis.
- 3) Ermittle die Grenzkosten in der Kostenkehre.
- 4) Wieviele ME müssen produziert werden, damit die Durchschnittskosten minimal sind?



- 1) $K(0) = 15$ GE
Wenn 0 ME produziert werden, betragen die Kosten 15 GE.
- 2) $K'(40) = 2,45$ GE/ME
Wenn 41 ME statt 40 ME produziert werden, steigen die Kosten *ungefähr* um 2,45 GE.
- 3) $K''(x) = 0 \implies x = 20 \implies K'(20) = 0,65$ GE/ME
- 4) Die Funktion $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ hat an der Stelle $x = 34,25$... ME den kleinsten Funktionswert.

Erlösfunktion (Umsatzfunktion)



MmF

Die **Erlösfunktion** E gibt die Einnahmen in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter ME an.

- Wenn der Preis p pro ME konstant ist, dann gilt für die Erlösfunktion E :

$$E(x) = p \cdot x \quad (x \text{ in ME, } p \text{ in GE/ME, } E(x) \text{ in GE})$$

In diesem Fall ist die Erlösfunktion E also eine **lineare Funktion** mit $E(0) = 0$, das heißt: Die Einnahmen sind **direkt proportional** zu den verkauften ME.

- In der Praxis hängen der Preis und die Anzahl verkaufter ME voneinander ab.

Je größer der Preis ist, desto weniger ME werden verkauft.

Die **Preisfunktion der Nachfrage** p_N gibt den Preis in Abhängigkeit von der zu verkaufenden Mengeneinheiten x an. In diesem Fall gilt für die Erlösfunktion E :

$$E(x) = p_N(x) \cdot x \quad (x \text{ in ME, } p_N(x) \text{ in GE/ME, } E(x) \text{ in GE})$$

Je größer die zu verkaufenden Mengeneinheiten x sein sollen, desto kleiner muss der Preis $p_N(x)$ sein.

In diesem Fall muss die Erlösfunktion also **nicht** unbedingt **streng monoton steigend** sein.

Preisfunktion der Nachfrage



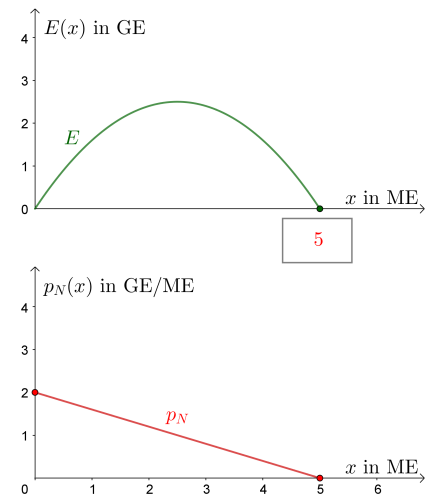
MmF

Für die Erlösfunktion E gilt: $E(x) = -0,4 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

- 1) Ermittle die Nullstelle von E .
Trage sie rechts in das Kästchen ein.
- 2) Ermittle eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N .
Zeichne rechts den Funktionsgraphen von p_N ein.

$$1) E(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ME oder } x = 5 \text{ ME}$$

$$2) p_N(x) = \frac{E(x)}{x} = -0,4 \cdot x + 2$$



Gewinnfunktion



MmF

Die **Gewinnfunktion** G gibt den Gewinn in Abhängigkeit von der produzierten und verkauften Mengeneinheiten an.

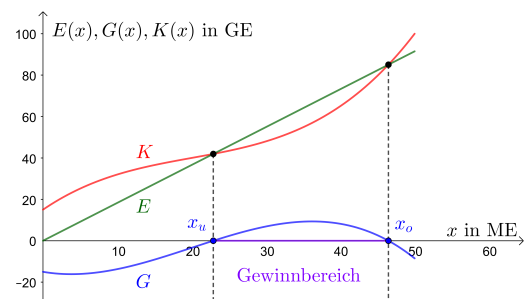
Dabei gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME

$G(x)$... Gewinn in GE

$E(x)$... Erlös in GE

$K(x)$... Produktionskosten in GE



- Bei der rechts oben dargestellten Gewinnfunktion G gibt es genau eine Stelle x_u , an der G das Vorzeichen von $-$ auf $+$ wechselt.
Diese Stelle x_u heißt auch **untere Gewinngrenze** / **Gewinnschwelle** / **Break-even-Point**.
- Bei der rechts oben dargestellten Gewinnfunktion G gibt es genau eine Stelle x_o , an der G das Vorzeichen von $+$ auf $-$ wechselt.
Diese Stelle x_o heißt auch **obere Gewinngrenze**.
- Das Intervall $[x_u; x_o]$ nennt man auch **Gewinnbereich (Gewinnzone)**.

Für die **quadratische** Erlösfunktion E gilt:

$$E(x) = -2 \cdot x^2 + 20 \cdot x$$

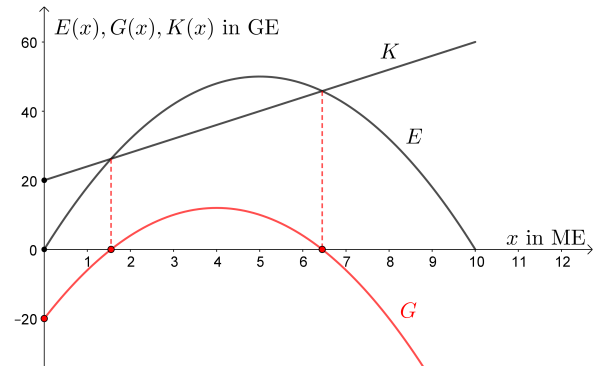
Für die lineare Kostenfunktion K gilt:

$$K(x) = 4 \cdot x + 20$$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME

$E(x)$... Erlös in GE

$K(x)$... Produktionskosten in GE



Die Graphen der beiden Funktionen sind rechts oben dargestellt.

- 1) Wieviele ME müssen produziert und verkauft werden, damit der Erlös maximal ist?
- 2) Zeichne 3 Punkte ein, durch die der Graph der zugehörigen Gewinnfunktion G verlaufen muss, und skizziere den Funktionsgraphen im dargestellten Bereich.
- 3) Wieviele ME müssen produziert und verkauft werden, damit der Gewinn maximal ist?

1) $E'(x) = 0 \iff x = 5 \text{ ME}$

2) G ist eine quadratische F. mit $G(0) = E(0) - K(0) = -20$ und $G(x) = 0 \iff K(x) = E(x)$.

3) $G(x) = E(x) - K(x) = -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 20$
 $G'(x) = 0 \iff x = 4 \text{ ME}$

Für eine Grenzkostenfunktion K' gilt: $K'(x) = 0,006 \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 6$ (x in ME, $K'(x)$ in GE/ME)

Die Fixkosten betragen 87 GE.

Ermittle die Produktionskosten für 42 ME.

Wir ermitteln jene Stammfunktion K von K' , die $K(0) = 87$ erfüllt:

$$K(x) = 0,002 \cdot x^3 - 0,1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + c$$

$$K(0) = 87 \iff c = 87$$

$$K(42) = 310,7... \text{ GE}$$

Die Kostenfunktion K ist eine **Polynomfunktion** mit Grad 3 und hat folgende Eigenschaften:

- Die Kostenkehre ist (15 ME | 110 GE).
- Die Grenzkosten in der Kostenkehre betragen 6 GE/ME.
- Wenn 30 ME produziert werden, betragen die Durchschnittskosten 7 GE/ME.

I : $K(15) = 110$

II : $K''(15) = 0$

III : $K'(15) = 6$

IV : $\frac{K(30)}{30} = 7$

Ermittle eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$K(x) = \frac{2}{675} \cdot x^3 - \frac{2}{15} \cdot x^2 + 8 \cdot x + 10 \quad (x \text{ in ME, } K(x) \text{ in GE})$$

