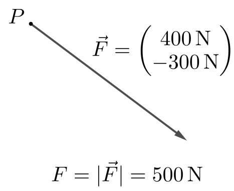
Kraftvektoren

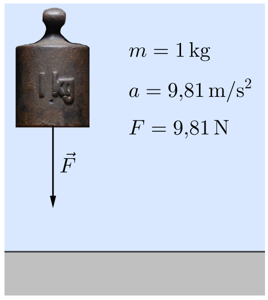
Bei Kräften ist nicht nur ihre *Größe* wichtig, sondern auch ihre *Richtung*.
Rechts ist eine Kraft durch einen Pfeil dargestellt.
Wir sprechen deshalb auch von einem **Kraftvektor** $\vec{F}$.
Die Länge des Pfeils ist der Betrag (die Größe) der Kraft.
Für den Betrag einer Kraft schreiben wir statt $|\vec{F}|$ auch kürzer F.



Für die Wirkung einer Kraft auf einen Körper ist auch der Angriffspunkt P der Kraft wichtig.
Wir können Kraftvektoren daher – im Gegensatz zu geometrischen Vektoren – *nicht* frei verschieben.

Newton

Die Größe einer Kraft messen wir in der Einheit Newton (N).



Mit einer Kraft mit dem Betrag $F = 1\,\mathrm{N}$ können wir einem Körper mit der Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ die Beschleunigung $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$ erteilen.

Mit 1 Newton können wir diesen Körper also aus dem Ruhezustand innerhalb einer Sekunde auf die Geschwindigkeit $1\,\mathrm{m/s}$ beschleunigen.

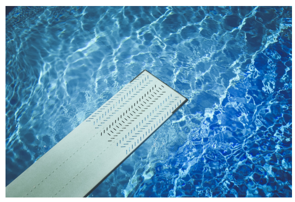
Wenn allgemein ein Körper mit der Masse m entlang einer geradlinigen Bahn beschleunigt wird, so wirkt auf ihn eine Kraft $\vec{F}$ in Wegrichtung.

Die Beschleunigung a kann positiv (Körper wird schneller) oder negativ (Körper wird langsamer) sein, je nachdem, ob der Kraftpfeil in Bewegungsrichtung oder gegen die Bewegungsrichtung orientiert ist.

Für den Betrag der Kraft gilt $\boldsymbol{F = m \cdot |a|}$ und für die Einheit $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$.

Diese Aussage ist eine vereinfachte Formulierung des Zweiten Newtonschen Gesetzes – eine Grundlage der klassischen Mechanik.
Isaac Newton konnte damit die Bewegung der Planeten mathematisch beschreiben.

Erdbeschleunigung

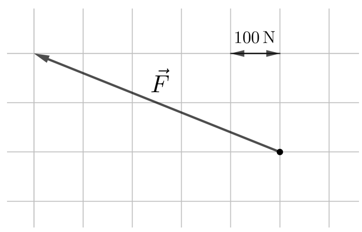


Julian springt im Schwimmbad von einem Sprungturm.
Seine Masse beträgt $m = 63\,\mathrm{kg}$.
Im freien Fall beschleunigt er mit $a \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ senkrecht nach unten.
Die zugehörige Kraft, die senkrecht nach unten wirkt, heißt **Gewichtskraft**.
Berechne den Betrag der Gewichtskraft, die im freien Fall auf Julian wirkt.

$$F = m \cdot a \approx 618\,\mathrm{N}$$

Kraftvektor

Rechts ist ein Kraftvektor $\vec{F}$ dargestellt.
Ermittle die Komponenten von $\vec{F}$ und seinen Betrag F.



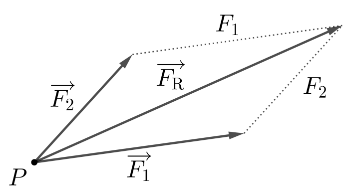
$\vec{F} = \begin{pmatrix} -500 \\ 200 \end{pmatrix}\mathrm{N} \qquad F = \sqrt{500^2 + 200^2} = 538{,}5\ldots\,\mathrm{N}$

Resultierende Kraft

Wirken in einem Punkt P zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$, dann haben sie die gleiche Wirkung wie die **resultierende Kraft** $\vec{F_R}$ mit:

$$\boldsymbol{\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}}$$

„Superpositionsprinzip“

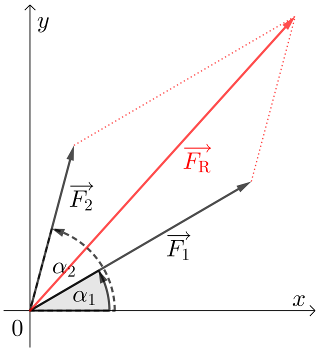


Diese Vektoraddition stellen wir in einem **Kräfteparallelogramm** dar.

Kräfteaddition

Für die beiden rechts dargestellten Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$ gilt:

$$|\overrightarrow{F_1}| = 800\,\text{N},\ \alpha_1 = 30^\circ \qquad |\overrightarrow{F_2}| = 520\,\text{N},\ \alpha_2 = 75^\circ$$



1) Berechne die Komponenten von $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$.
Hinweis: Verwende die Winkelfunktionen in rechtwinkeligen Dreiecken.

2) Veranschauliche rechts die resultierende Kraft $\overrightarrow{F_\text{R}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

3) Berechne die resultierende Kraft $\overrightarrow{F_\text{R}}$ und ihren Betrag F_R.

4) Berechne den Winkel α, den $\overrightarrow{F_\text{R}}$ mit der positiven x-Achse einschließt.

1) $\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 800\cdot\cos(30^\circ) \\ 800\cdot\sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692{,}8\ldots \\ 400 \end{pmatrix}\,\text{N} \qquad \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 520\cdot\cos(75^\circ) \\ 520\cdot\sin(75^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134{,}5\ldots \\ 502{,}2\ldots \end{pmatrix}\,\text{N}$

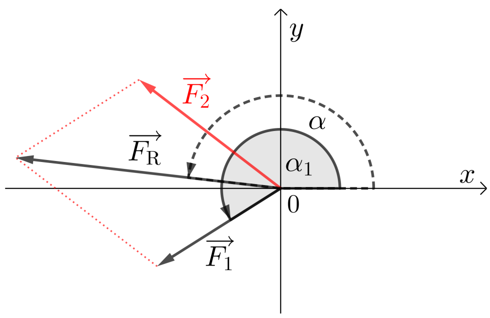
3) $\overrightarrow{F_\text{R}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 827{,}4\ldots \\ 902{,}2\ldots \end{pmatrix}\,\text{N} \qquad F_\text{R} = \sqrt{827{,}4\ldots^2 + 902{,}2\ldots^2} = 1224{,}2\ldots\,\text{N}$

4) $\tan(\alpha) = \frac{902{,}2\ldots}{827{,}4\ldots} \implies \alpha = 47{,}4\ldots^\circ$

Kräftezerlegung

Für die beiden rechts dargestellten Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_\text{R}}$ gilt:

$$|\overrightarrow{F_1}| = 250\,\text{N},\ \alpha_1 = 210^\circ \qquad |\overrightarrow{F_\text{R}}| = 450\,\text{N},\ \alpha = 170^\circ$$



Dabei ist $\overrightarrow{F_\text{R}}$ die resultierende Kraft von $\overrightarrow{F_1}$ und einer weiteren Kraft $\overrightarrow{F_2}$, die auch im Koordinatenursprung angreift.

1) Berechne die Komponenten von $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_\text{R}}$.
Hinweis: Verwende die Winkelfunktionen am Einheitskreis.

2) Veranschauliche rechts den Kraftvektor $\overrightarrow{F_2}$ als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung.

3) Berechne den Kraftvektor $\overrightarrow{F_2}$ und seinen Betrag F_2.

4) Berechne den Winkel α_2, den $\overrightarrow{F_2}$ mit der positiven x-Achse einschließt.

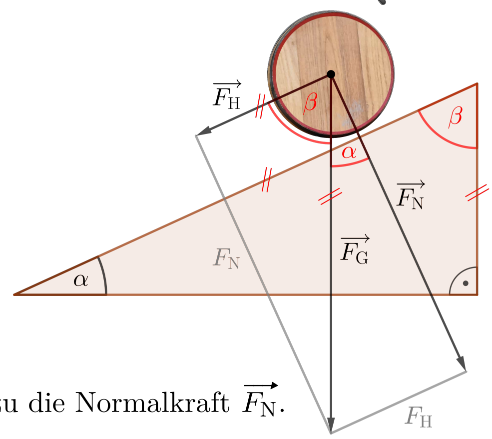
1) $\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 250\cdot\cos(210^\circ) \\ 250\cdot\sin(210^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -216{,}5\ldots \\ -125 \end{pmatrix}\,\text{N} \qquad \overrightarrow{F_\text{R}} = \begin{pmatrix} 450\cdot\cos(170^\circ) \\ 450\cdot\sin(170^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -443{,}1\ldots \\ 78{,}14\ldots \end{pmatrix}\,\text{N}$

3) $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_\text{R}} - \overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} -226{,}6\ldots \\ 203{,}1\ldots \end{pmatrix}\,\text{N} \qquad F_2 = \sqrt{226{,}6\ldots^2 + 203{,}1\ldots^2} = 304{,}3\ldots\,\text{N}$

4) $\alpha_2 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{203{,}1\ldots}{226{,}6\ldots}\right) = 138{,}1\ldots^\circ$

Rampe

Ein Fass mit der Masse $m = 50\,\text{kg}$ rollt die rechts dargestellte Rampe mit dem Steigungswinkel $\alpha = 25^\circ$ hinunter.



1) Berechne den Betrag der Gewichtskraft $\vec{F_G}$, die dabei auf das Fass wirkt (Erdbeschleunigung $a \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$).

$$F_G = m \cdot a = 490{,}5\,\text{N}$$

Die Gewichtskraft $\vec{F_G}$ kann – wie rechts dargestellt – in zwei Kräfte zerlegt werden: $\vec{F_G} = \vec{F_H} + \vec{F_N}$

Dabei ist $\vec{F_H}$ die Hangabtriebskraft und im rechten Winkel dazu die Normalkraft $\vec{F_N}$.

2) Die Kraftvektoren $\vec{F_G}$ und $\vec{F_N}$ schließen den Winkel α ein. Warum?

Die beiden eingezeichneten Winkel β sind als Parallelwinkel gleich groß.
Aus der Winkelsumme 180° im Dreieck (Rampenquerschnitt) folgt, dass $\alpha + \beta = 90^\circ$ gilt.
Also schließen die Kraftvektoren $\vec{F_G}$ und $\vec{F_N}$ den Winkel α ein.

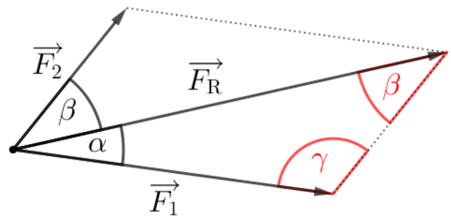
3) Berechne den Betrag F_H der Hangabtriebskraft und den Betrag F_N der Normalkraft.

$$\sin(\alpha) = \frac{F_H}{F_G} \implies F_H = F_G \cdot \sin(\alpha) = 207{,}2\ldots\,\text{N}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{F_N}{F_G} \implies F_N = F_G \cdot \cos(\alpha) = 444{,}5\ldots\,\text{N}$$

Kräfteparallelogramm – Sinussatz

Im rechts dargestellten Kräfteparallelogramm gilt:



$$|\vec{F_1}| = 42\,\text{N},\ \alpha = 20^\circ,\ \beta = 38^\circ$$

Berechne den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F_R}$.

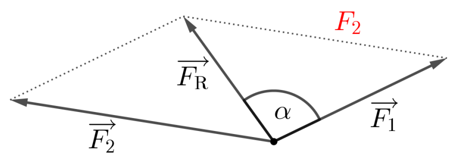
Hinweis: Verwende die Winkelfunktionen im allgemeinen Dreieck.

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 122^\circ$$

$$\frac{F_R}{\sin(\gamma)} = \frac{F_1}{\sin(\beta)} \implies F_R = \frac{F_1 \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = 57{,}85\ldots\,\text{N} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Kräfteparallelogramm – Cosinussatz

Im rechts dargestellten Kräfteparallelogramm gilt:



$$|\vec{F_1}| = 380\,\text{N},\ \alpha = 100^\circ,\ |\vec{F_R}| = 300\,\text{N}$$

Berechne den Betrag der Kraft $\vec{F_2}$.

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + F_R^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_R \cdot \cos(\alpha)} = 523{,}4\ldots\,\text{N} \qquad \text{(Cosinussatz)}$$

Arbeit – Kraft in Wegrichtung

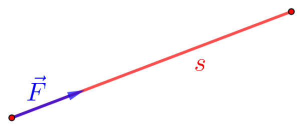
Wenn ein Körper entlang eines geradlinigen Wegs der Länge s bewegt wird und dabei auf den Körper stets eine Kraft $\vec{F}$ wirkt, so wird Arbeit verrichtet.

Wenn $\vec{F}$ konstant ist und in Bewegungsrichtung zeigt, dann ist

$$\boldsymbol{W = F \cdot s}$$

die dabei verrichtete **Arbeit** $\boldsymbol{W}$ (engl. Work).

Für die Einheit der Arbeit gilt: $1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}$ (1 Joule)



James Prescott Joule

Hubarbeit

Du hebst einen vollen Wasserkübel mit der Masse $m = 12\,\mathrm{kg}$ auf einen $80\,\mathrm{cm}$ hohen Tisch senkrecht nach oben. Berechne die dabei verrichtete Arbeit in Joule.

Hinweis: Du kannst für die gesamte Bewegung mit der Erdbeschleunigung $a \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ rechnen.
Damit der Wasserkübel in Bewegung kommt, ist zu Beginn zwar kurz eine größere Beschleunigung notwendig.
Dafür ist aber beim Abstellen ausgleichend eine kleinere Beschleunigung notwendig.

$$F = m \cdot a = 12\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 117{,}72\,\mathrm{N}$$

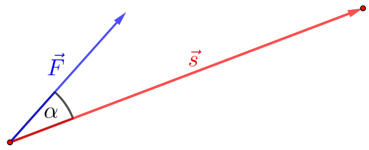
$$W = F \cdot s = 117{,}72\,\mathrm{N} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} = 94{,}176\,\mathrm{J}$$

Arbeit – Skalarprodukt

Wenn ein Körper entlang eines Vektors $\vec{s}$ bewegt wird und dabei auf den Körper stets eine Kraft $\vec{F}$ wirkt, so wird Arbeit verrichtet.

Wenn $\vec{F}$ konstant ist, dann ist das Skalarprodukt

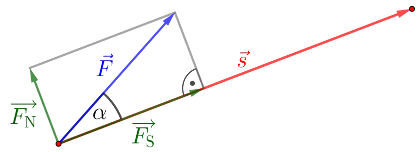
$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$



die dabei verrichtete **Arbeit** $\boldsymbol{W}$. Wir begründen diese Formel:

Zerlegt man die Kraft $\vec{F}$ in die Kräfte $\vec{F_S}$ (in Bewegungsrichtung) und $\vec{F_N}$ (normal zur Bewegungsrichtung), dann folgt aus der Vektor-Winkel-Formel:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha) = \underbrace{|\vec{F_S}|}_{\text{Kraft in Wegrichtung}} \cdot \overbrace{|\vec{s}|}^{\text{Weglänge}} = W \checkmark$$

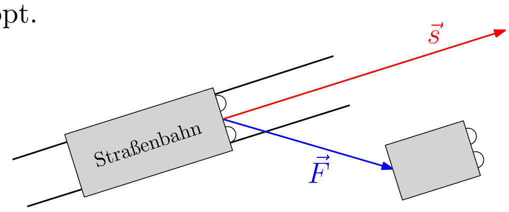


Arbeit – Skalarprodukt

Eine Straßenbahn wird von einem Einsatzfahrzeug abgeschleppt.

Auf einem geraden Abschnitt entlang des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 40\,\mathrm{m} \\ 20\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$ wirkt auf die Straßenbahn die konstante Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2{,}5\,\mathrm{kN} \\ -0{,}5\,\mathrm{kN} \end{pmatrix}$.

Berechne die dabei verrichtete Arbeit W in Kilojoule (kJ).



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 2{,}5\,\mathrm{kN} \\ -0{,}5\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40\,\mathrm{m} \\ 20\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = 2{,}5\,\mathrm{kN} \cdot 40\,\mathrm{m} + (-0{,}5\,\mathrm{kN}) \cdot 20\,\mathrm{m} = 90\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m} = 90\,\mathrm{kJ}$$