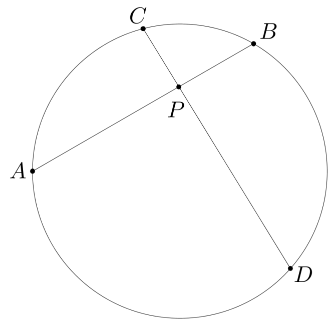
Sehnensatz

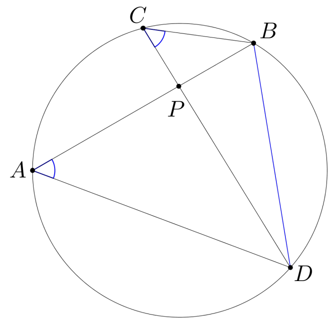
Seien AB bzw. CD zwei Sehnen eines Kreises, die einander im Inneren des Kreises im Punkt P schneiden. Dann gilt:

$$\boldsymbol{AP \cdot PB = CP \cdot PD}$$

Schneiden einander zwei Sehnen, so ist das Produkt der Sehnenabschnitte gleich.



1) Erkläre, warum $\angle DAP = \angle PCB$ gilt.



2) Folgere daraus, dass die beiden Dreiecke PBC und PAD ähnlich sind.

Aufgrund der Ähnlichkeit gilt nun

$$\frac{AP}{PD} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

und durch Multiplikation ist der Sehnensatz gezeigt.

Umkehrung des Sehnensatzes

Seien A, B, C und D vier Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen und für die $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ gilt.
Dann liegen die 4 Punkte auf einem gemeinsamen Kreis.

Beweis. Die drei Punkte A, B und C liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden und bestimmen somit einen eindeutigen Kreis k, den Umkreis des Dreiecks. Wir bezeichnen den zweiten Schnittpunkt der Gerade CD mit dem Kreis k mit $\overline{D}$.

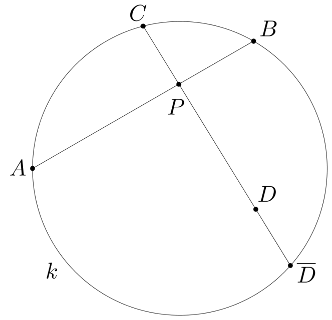
Wegen des Sehnensatzes gilt:

$$AP \cdot PB = CP \cdot P\overline{D}$$

Wegen der Voraussetzung gilt gleichzeitig auch

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = CP \cdot P\overline{D}$$

und somit ist $D = \overline{D}$. Also liegt auch D auf dem Kreis k.



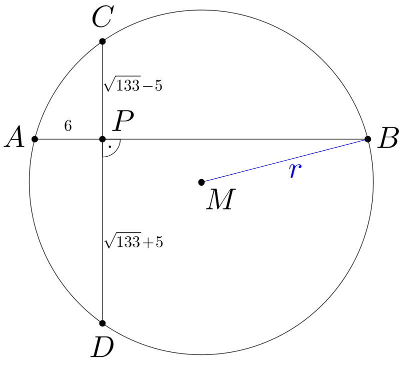
□

Sehnensatz

Aufgabe 1. *Die beiden Sehnen AB und CD des Kreises k mit Mittelpunkt M schneiden einander im Punkt P und stehen normal aufeinander. Es gilt:*

$$CP = \sqrt{133} - 5, \quad PD = \sqrt{133} + 5 \quad \text{und} \quad AP = 6$$

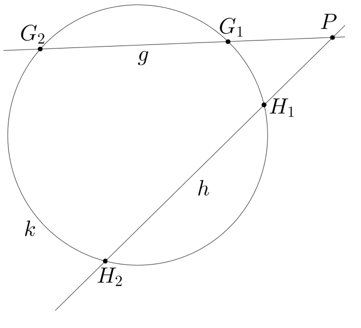
Bestimme den Radius r des Kreises k.



Sekantensatz

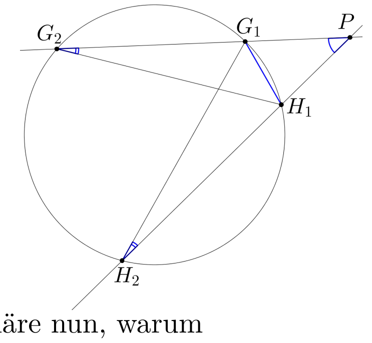
Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Die Gerade g durch P schneide k in den beiden Punkten G_1 und G_2 und die Gerade h durch P schneide k in den Punkten H_1 und H_2.
Dann gilt:

$$\boldsymbol{PG_1 \cdot PG_2 = PH_1 \cdot PH_2}$$



Schneiden einander zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Sekantenabschnitte, gemessen von diesem Schnittpunkt aus, bei beiden Sekanten gleich groß.

Erkläre mithilfe der Skizze, warum die beiden Dreiecke PG_1H_2 und PG_2H_1 ähnlich sind.



Erkläre nun, warum

$$PG_1 \cdot PG_2 = PH_1 \cdot PH_2$$

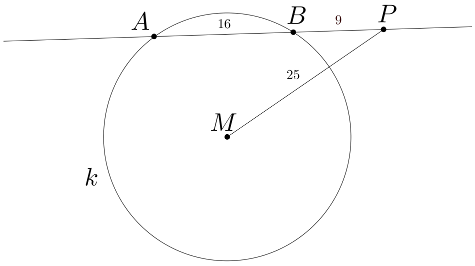
gilt.

Sekantensatz

Aufgabe 2. *Sei AB eine Sehne der Länge 16 des Kreises k mit Radius r. Der Punkt P liegt auf AB über B hinaus. Es gilt:*

$$AB = 16, \quad PB = 9, \quad \text{und} \quad PM = 25$$

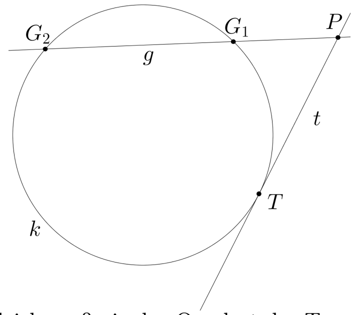
Bestimme r.



Sekanten-Tangentensatz

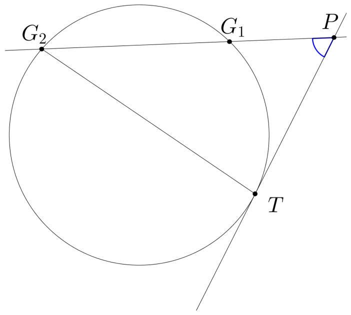
Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Die Gerade g durch P schneide k in den beiden Punkten G_1 und G_2 und die Tangente t durch P berühre den Kreis im Punkt T.
Dann gilt:

$$\boldsymbol{PG_1 \cdot PG_2 = PT^2}$$



Das Produkt der Sekantenabschnitte, gemessen von einem Punkt außerhalb des Kreises ist gleich groß wie das Quadrat des Tangentenabschnitts von diesem Punkt.

Erkläre mithilfe der Skizze, warum die beiden Dreiecke PG_1T und PG_2T ähnlich sind.



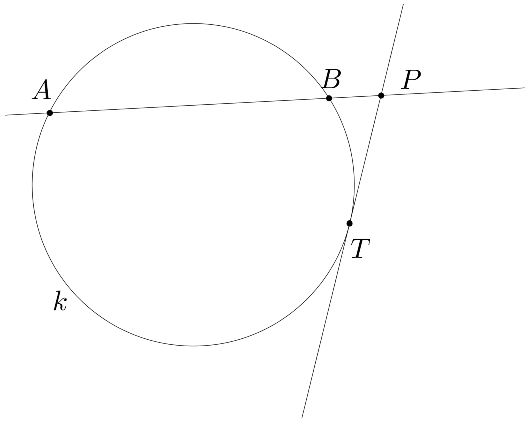
Erkläre nun, warum

$$PG_1 \cdot PG_2 = PT^2$$

gilt.

Sekanten-Tangentensatz

Aufgabe 3. *Gegeben sind ein Kreis k, eine Sehne AB von k und ein Punkt P, der auf der Geraden AB über B hinaus liegt. Wir bezeichnen den Berührpunkt einer der Tangenten an k durch P mit T. Die Strecke AB ist achtmal so lang wie BP. Bestimme* $\frac{TP}{AB}$.



Eine Sehne eines Kreises ist 14 cm lang. Um wie viel muss sie verlängert werden, damit die Tangente von diesem Endpunkt 24 cm lang ist?

Gegeben sind ein Kreis mit Radius $r = 25\,\text{cm}$ und ein Punkt P, der 31 cm vom Mittelpunkt des Kreises entfernt ist. Von P aus wird eine Sekante zum Kreis gezogen, deren äußerer Abschnitt um 4 cm länger ist als der innere. Wie lang ist die so entstandene Sehne?

Gegeben sind ein Kreis k und ein außerhalb von k liegender Punkt P. Die Gerade g durch P schneidet k in den Punkten G_1 und G_2 und die Gerade h durch P schneidet k in den Punkten H_1 und H_2. Die Tangente t von k durch P berührt den Kreis k im Punkt T. Die Strecke PG_1 ist 4 cm und es gilt, dass $3 \cdot PH_1 = PG_2 = H_1H_2$.
Bestimme die Länge der Strecke PT.

Schmetterlingssatz

Gegeben ist ein Kreis k und eine Sehne ST. Die beiden Sehnen AB und CD schneiden einander in M_{ST}, wobei A und C auf derselben Seite von ST liegen. Die Schnittpunkte von ST mit AB bzw. CD seien P und Q.
Zeige, dass M_{ST} auch der Mittelpunkt von PQ ist.