



Die **Differentialgleichungen** (DGL)

$$1) y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}, \quad 2) y'(x) = 2 \cdot y(x) - 3 \cdot x \quad \text{und} \quad 3) y'(x) = -3 \cdot y(x) + \cos(x)$$

haben alle die Form  $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$ .

Es sind **lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

- i) Sie haben **1. Ordnung**, weil  $y'$  die höchste auftretende Ableitung von  $y$  ist. Es kommt zum Beispiel  $y''$  *nicht* vor.
- ii) Sie sind **linear**, weil sie die Form  $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$  haben. Es kommen z. B.  $y^2$  oder  $y \cdot y'$  oder  $\sin(y')$  *nicht* vor.
- iii) Sie haben **konstante Koeffizienten**, weil in  $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$  tatsächlich  $f(x) = k$  *nicht* von  $x$  abhängt.

Wenn  $s(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, dann ist

$$y'(x) = k \cdot y(x)$$

eine **homogene Differentialgleichung**.

Ansonsten nennt man

$$y'(x) = k \cdot y(x) + \overbrace{s(x)}^{\text{Störfunktion}}$$

eine **inhomogene Differentialgleichung**.



Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$$

kannst du mit den folgenden Schritten ermitteln:

- 1) Löse die homogene DGL  $y'(x) = k \cdot y(x)$  mithilfe der Methode **Trennung der Variablen**.

Die allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen DGL nennen wir auch kurz **homogene Lösung**.

- 2) Ermittle eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL  $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$ .

Jede spezielle Lösung  $y_p$  der inhomogenen DGL nennen wir auch kurz **partikuläre Lösung**.

- 3) Die **allgemeine Lösung** der DGL ist dann  $y = y_h + y_p$ . Mehr dazu am Ende des Arbeitsblatts.



Die DGL  $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$  hat die zugehörige homogene DGL  $y'(x) = 4 \cdot y(x)$ .

- 1) Ermittle die homogene Lösung  $y_h$  mithilfe der Methode **Trennung der Variablen**.
- 2) Eine partikuläre Lösung  $y_p$  ermitteln wir mit Technologieeinsatz:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 4 \cdot y(x) \\ \frac{dy}{dx} &= 4 \cdot y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int 4 dx \\ \ln(|y|) &= 4 \cdot x + c_1 \\ |y| &= e^{4 \cdot x + c_1} = c_2 \cdot e^{4 \cdot x} \\ y(x) &= c \cdot e^{4 \cdot x} \end{aligned}$$

CAS	
1	LöseDgl(y'=4*y+exp(6*x))
<input type="radio"/>	$\rightarrow y = c_1 e^{4x} + \frac{1}{2} e^{6x}$

Eine partikuläre Lösung ist  $y_p(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$ .

Mehr zum Lösen dieser DGL ohne Technologieeinsatz findest du am **Arbeitsblatt – Variation der Konstanten**.

Die homogene Lösung ist  $y_h(x) = c \cdot e^{4 \cdot x}$ .

- 3) Für die allgemeine Lösung der DGL  $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$  gilt:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{4 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$$

Die DGL  $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$  hat die zugehörige homogene DGL  $y'(x) = k \cdot y(x)$ .

1) Begründe mithilfe der **Ableitungsregeln**, warum die **Exponentialfunktion**  $y_h$  mit

$$y_h(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$$

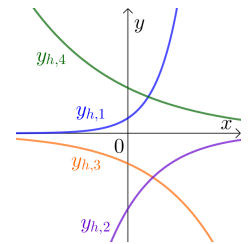
die homogene Lösung der DGL ist.

$$y'_h(x) = c \cdot e^{k \cdot x} \cdot k \implies y'_h(x) = k \cdot y_h(x) \checkmark$$

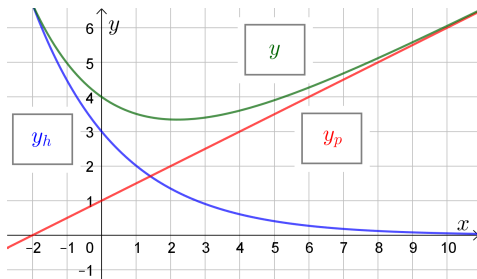
2) Das Verhalten der Exponentialfunktion  $y_h$  hängt von den Vorzeichen von  $c$  und  $k$  ab. Rechts sind 4 verschiedene Funktionsgraphen dargestellt.

Trage passend zu den Graphen  $>$  oder  $<$  in die Kästchen ein.

- i)  $y_{h,1}$ :  $c > 0$  und  $k > 0$       iii)  $y_{h,3}$ :  $c < 0$  und  $k > 0$
- ii)  $y_{h,2}$ :  $c < 0$  und  $k < 0$       iv)  $y_{h,4}$ :  $c > 0$  und  $k < 0$



3) Von einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind die Graphen einer homogenen Lösung  $y_h$ , einer partikulären Lösung  $y_p$  und der zugehörigen Lösung  $y = y_h + y_p$  dargestellt. Beschrifte die Funktionsgraphen und begründe deine Wahl.



Wegen  $y(0) = y_h(0) + y_p(0)$  muss der grüne Funktionsgraph von  $y$  sein.

Da bei dieser DGL  $y_h$  eine Exponentialfunktion ist, muss der blaue Funktionsgraph von  $y_h$  und der rote Funktionsgraph von  $y_p$  sein.

Zum Abschluss beweisen wir noch die folgende Behauptung:

Wenn die Funktion  $y_h$  eine Lösung der homogenen DGL  $y'(x) = k \cdot y(x)$  ist, und die Funktion  $y_p$  eine Lösung der inhomogenen DGL  $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$  ist, dann ist auch  $y = y_h + y_p$  eine Lösung der inhomogenen DGL  $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$ .

Laut Voraussetzung gilt  $y'_h(x) = k \cdot y_h(x)$  und  $y'_p(x) = k \cdot y_p(x) + s(x)$ . Aus der **Summenregel** folgt:

$$y'(x) = y'_h(x) + y'_p(x) = k \cdot y_h(x) + k \cdot y_p(x) + s(x) = k \cdot [y_h(x) + y_p(x)] + s(x) = k \cdot y(x) + s(x)$$

$$\implies y'(x) = k \cdot y(x) + s(x) \checkmark$$

