Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichungen (DGL)

1) $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$, **2)** $y'(x) = 2 \cdot y(x) - 3 \cdot x$ und **3)** $y'(x) = -3 \cdot y(x) + \cos(x)$

haben alle die Form $\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)}$.

Es sind **lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

i) Sie haben **1. Ordnung**, weil y' die höchste auftretende Ableitung von y ist. Es kommt zum Beispiel y'' *nicht* vor.

ii) Sie sind **linear**, weil sie die Form $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$ haben. Es kommen z. B. y^2 oder $y \cdot y'$ oder $\sin(y')$ *nicht* vor.

iii) Sie haben **konstante Koeffizienten**, weil in $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$ tatsächlich $f(x) = k$ *nicht* von x abhängt.

Wenn $\boldsymbol{s(x) = 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist

$$\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x)}$$

eine **homogene Differentialgleichung**.

Ansonsten nennt man

$$\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x) + \overbrace{s(x)}^{\text{Störfunktion}}}$$

eine **inhomogene Differentialgleichung**.

Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)}$$

kannst du mit den folgenden Schritten ermitteln:

1) Löse die homogene DGL $y'(x) = k \cdot y(x)$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

Die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y_h}$ der homogenen DGL nennen wir auch kurz **homogene Lösung**.

2) Ermittle eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$.

Jede spezielle Lösung $\boldsymbol{y_p}$ der inhomogenen DGL nennen wir auch kurz **partikuläre Lösung**.

3) Die **allgemeine Lösung** der DGL ist dann $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$.

Mehr dazu am Ende des Arbeitsblatts.

Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

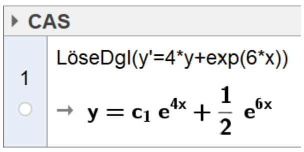
Die DGL $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$ hat die zugehörige homogene DGL $y'(x) = 4 \cdot y(x)$.

1) Ermittle die homogene Lösung y_h mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 4 \cdot y(x) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 4 \cdot y \\
\int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y &= \int 4\, \mathrm{d}x \\
\ln(|y|) &= 4 \cdot x + c_1 \\
|y| &= e^{4 \cdot x + c_1} = c_2 \cdot e^{4 \cdot x} \\
y(x) &= c \cdot e^{4 \cdot x}
\end{aligned}$$

Die homogene Lösung ist $y_h(x) = c \cdot e^{4 \cdot x}$.

2) Eine partikuläre Lösung y_p ermitteln wir mit Technologieeinsatz:



Eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$.

Mehr zum Lösen dieser DGL ohne Technologieeinsatz findest du am Arbeitsblatt – Variation der Konstanten.

3) Für die allgemeine Lösung der DGL $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$ gilt:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{4 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$$

$\boldsymbol{y' = k \cdot y}$

Die DGL $\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)}$ hat die zugehörige homogene DGL $y'(x) = k \cdot y(x)$.

1) Begründe mithilfe der Ableitungsregeln, warum die Exponentialfunktion y_h mit

$$\boldsymbol{y_h(x) = c \cdot e^{k \cdot x}}$$

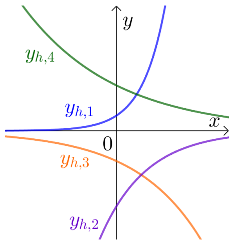
die homogene Lösung der DGL ist.

$$y_h'(x) = c \cdot e^{k \cdot x} \cdot k \implies y_h'(x) = k \cdot y_h(x) \checkmark$$

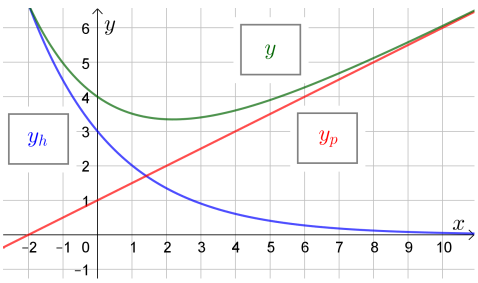
2) Das Verhalten der Exponentialfunktion y_h hängt von den Vorzeichen von c und k ab.
Rechts sind 4 verschiedene Funktionsgraphen dargestellt.
Trage passend zu den Graphen $>$ oder $<$ in die Kästchen ein.

i) $y_{h,1}$: $c > 0$ und $k > 0$ **iii)** $y_{h,3}$: $c < 0$ und $k > 0$

ii) $y_{h,2}$: $c < 0$ und $k < 0$ **iv)** $y_{h,4}$: $c > 0$ und $k < 0$



3) Von einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind die Graphen einer homogenen Lösung y_h, einer partikulären Lösung y_p und der zugehörigen Lösung $y = y_h + y_p$ dargestellt. Beschrifte die Funktionsgraphen und begründe deine Wahl.



Wegen $y(0) = y_h(0) + y_p(0)$ muss der grüne Funktionsgraph von y sein.

Da bei dieser DGL y_h eine Exponentialfunktion ist, muss der blaue Funktionsgraph von y_h und der rote Funktionsgraph von y_p sein.

$\boldsymbol{y = y_h + y_p}$

Zum Abschluss beweisen wir noch die folgende Behauptung:

Wenn die Funktion y_h eine Lösung der homogenen DGL $y'(x) = k \cdot y(x)$ ist,
und die Funktion y_p eine Lösung der inhomogenen DGL $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$ ist,
dann ist auch $y = y_h + y_p$ eine Lösung der inhomogenen DGL $y'(x) = k \cdot y(x) + s(x)$.

Laut Voraussetzung gilt $y_h'(x) = k \cdot y_h(x)$ und $y_p'(x) = k \cdot y_p(x) + s(x)$. Aus der Summenregel folgt:

$$y'(x) = y_h'(x) + y_p'(x) = k \cdot y_h(x) + k \cdot y_p(x) + s(x) = k \cdot [y_h(x) + y_p(x)] + s(x) = k \cdot y(x) + s(x)$$

$$\implies y'(x) = k \cdot y(x) + s(x) \checkmark$$