Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichungen (DGL)

1) $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 32 \cdot x$,

2) $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = e^{2 \cdot x}$ und

3) $y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 13 \cdot y(x) = 42$

haben alle die Form $\boldsymbol{y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = s(x)}$.

Es sind **lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

i) Sie haben **2. Ordnung**, weil y'' die höchste auftretende Ableitung von y ist. Es kommt zum Beispiel y''' *nicht* vor.

ii) Sie sind **linear**, weil sie die Form $y''(x) + f(x) \cdot y'(x) + g(x) \cdot y(x) = s(x)$ haben.
Es kommen z. B. y^2 oder $y \cdot y'$ oder $\sin(y')$ *nicht* vor.

iii) Sie haben **konstante Koeffizienten**, weil die Koeffizienten $f(x) = a$ und $g(x) = b$ *nicht* von x abhängen.

Wenn $\boldsymbol{s(x) = 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist

$$\boldsymbol{y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0}$$

eine **homogene Differentialgleichung**.

Ansonsten nennt man

$$\boldsymbol{y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = \overbrace{s(x)}^{\text{Störfunktion}}}$$

eine **inhomogene Differentialgleichung**.

Zwei Integrationskonstanten

Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y''(x) = x^2 + \cos(x)$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a = 0$ und $b = 0$.

Superpositionsprinzip

Wenn y_1 und y_2 Lösungen der homogenen DGL

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

sind, dann ist auch $y = y_1 + y_2$ eine Lösung dieser DGL, denn es gilt:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = (y_1 + y_2)'' + a \cdot (y_1 + y_2)' + b \cdot (y_1 + y_2) =$$

$$= \underbrace{y_1'' + a \cdot y_1' + b \cdot y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + a \cdot y_2' + b \cdot y_2}_{=0} = 0$$

Allgemeine Lösung

Tatsächlich gilt: Sind y_1 und y_2 zwei nicht-triviale linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

dann hat *jede* Lösung y dieser DGL die Form $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$.

Eine Funktion ist nicht-trivial, wenn sie verschieden von der (trivialen) Nullfunktion $y(x) = 0$ ist.
Nicht-triviale Funktionen y_1 und y_2 sind linear unabhängig, wenn es keine Konstante c gibt, sodass $y_2(x) = c \cdot y_1(x)$ für alle x gilt.

Charakteristische Gleichung

Wenn λ eine Lösung der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0}$ ist,
dann ist $y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen DGL $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$.

Diese Behauptung folgt aus der Kettenregel:

$$y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$
$$y'(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot \lambda = \lambda \cdot y(x)$$
$$y''(x) = \lambda \cdot y'(x) = \lambda^2 \cdot y(x)$$

Wir setzen in die homogene DGL $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$ ein:

$$\lambda^2 \cdot y(x) + a \cdot \lambda \cdot y(x) + b \cdot y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) \cdot \left[\lambda^2 + a \cdot \lambda + b\right] = 0$$

Wenn $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ gilt, dann erfüllt also $y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ tatsächlich die zugehörige homogene DGL.

Charakteristische Gleichung mit 2 reellen Lösungen

Die homogene DGL $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 0$ kannst du mit den folgenden Schritten lösen:

1) Stelle die zugehörige **charakteristische Gleichung** $\boldsymbol{\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 8 = 0}$ auf.

2) Löse die charakteristische Gleichung.

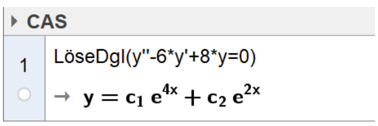
Also sind die Funktionen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{\boxed{} \cdot x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = c_2 \cdot e^{\boxed{} \cdot x}$$

jeweils Lösungen dieser homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

3) Für die allgemeine Lösung y gilt also:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \boxed{}$$



Spezielle Lösung – 2 Punkte

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

Ermittle jene spezielle Lösung dieser DGL, die $y(0) = 5$ und $y(1) = -3$ erfüllt.

Charakteristische Gleichung mit genau einer reellen Lösung

Die homogene DGL $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$ kannst du mit den folgenden Schritten lösen:

1) Stelle die zugehörige **charakteristische Gleichung** $\boldsymbol{\lambda^2 + 6 \cdot \lambda + 9 = 0}$ auf.

2) Löse die charakteristische Gleichung.

Also ist die Funktion y_1 mit $y_1(x) = c_1 \cdot e^{\boxed{} \cdot x}$ eine Lösung dieser homogenen DGL.

Tatsächlich ist in diesem Fall mit genau einer reellen Lösung λ auch die Funktion y_2 mit

$y_2(x) = c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} = c_2 \cdot x \cdot e^{\boxed{} \cdot x}$ eine Lösung. Setze y_2 in die DGL ein und rechne nach.

3) Für die allgemeine Lösung y gilt also:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \boxed{}$$

Spezielle Lösung – Punkt & Steigung

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Ermittle jene spezielle Lösung dieser DGL, die $y(0) = 4$ und $y'(0) = 2$ erfüllt.

Charakteristische Gleichung ohne reelle Lösungen

Die homogene DGL $y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 13 \cdot y(x) = 0$ kannst du mit den folgenden Schritten lösen:

1) Stelle die zugehörige **charakteristische Gleichung** $\boldsymbol{\lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 13 = 0}$ auf.

2) Ermittle die beiden komplexen Lösungen dieser charakteristischen Gleichung.

Also sind die Funktionen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{\boxed{} \cdot x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = c_2 \cdot e^{\boxed{} \cdot x}$$

jeweils Lösungen dieser homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

3) Für die allgemeine Lösung y gilt also:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \boxed{}$$

Eulersche Formel MmF

Die homogene DGL $y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 13 \cdot y(x) = 0$ hat in $\mathbb{C}$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cdot e^{(2+3\cdot i)\cdot x} + c_2 \cdot e^{(2-3\cdot i)\cdot x}$$

mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{C}$. Mithilfe der Eulerschen Formel

$$\boldsymbol{e^{i\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}$$

kann man zeigen, dass diese homogene DGL in $\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2\cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x) + C_2 \cdot e^{2\cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x)$$

mit $C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$ hat.

3 Lösungsfälle MmF

Zum Lösen der homogenen DGL $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$ unterscheiden wir bei der zugehörigen charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ also 3 Lösungsfälle:

i) Die charakteristische Gleichung hat zwei reelle Lösungen λ_1 und λ_2.
Dann gilt für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

ii) Die charakteristische Gleichung hat genau eine reelle Lösung λ.
Dann gilt für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda\cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda\cdot x}$$

iii) Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Lösung,
aber die beiden komplex konjugierten Lösungen $\alpha + i \cdot \beta$ und $\alpha - i \cdot \beta$.
Dann gilt für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha\cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + c_2 \cdot e^{\alpha\cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \overset{(\star)}{=} e^{\alpha\cdot x} \cdot A \cdot \sin(\beta \cdot x + \varphi)$$

$(\star)$ Diese letzte Darstellungsform kann man aus den Summensätzen für Winkelfunktionen folgern.

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten MmF

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = s(x)}$$

kannst du mit den folgenden Schritten ermitteln:

1) Löse die zugehörige homogene DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$.

Die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y_h}$ der homogenen DGL nennen wir auch kurz **homogene Lösung**.

2) Ermittle eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

Jede spezielle Lösung $\boldsymbol{y_p}$ der inhomogenen DGL nennen wir auch kurz **partikuläre Lösung**.

Wie auch bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung hilft dabei die Methode *Variation der Konstanten*.
Man kann auch – abhängig von der Art der Störfunktion s – eine partikuläre Lösung mit einem passenden Ansatz ermitteln.
Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Auflistung aller Ansätze inklusive Ausnahmen und Sonderfälle.

3) Die **allgemeine Lösung** der inhomogenen DGL ist dann $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$.

Lineare Störfunktion

Die inhomogene DGL

$$y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 32 \cdot x$$

hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = k \cdot x + d$. Ermittle diese partikuläre Lösung y_p.

Hinweis: Ermittle y_p' und y_p'' und setze in die inhomogene DGL ein. Vergleiche dann die Koeffizienten auf beiden Seiten.

Für die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

Für die allgemeine Lösung y der inhomogenen DGL gilt also:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{}$$

Exponentielle Störfunktion

Die inhomogene DGL

$$y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = e^{2 \cdot x}$$

hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = c \cdot e^{2 \cdot x}$. Ermittle diese partikuläre Lösung y_p.

Für die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Für die allgemeine Lösung y der inhomogenen DGL gilt also:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{}$$

Federschwingungen

Eine Kugel mit der Masse $m > 0$ hängt an einer Feder mit der Federkonstante $k > 0$.

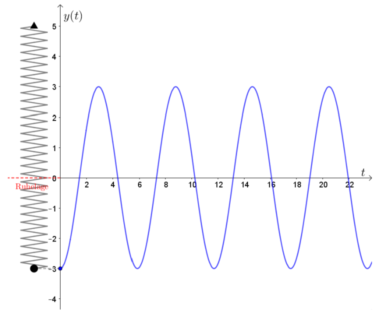
Die Ruhelage der Kugel ist $y = 0$.

Die Auslenkung der Kugel zum Zeitpunkt t ist $y(t)$.

Dann ist $y'(t)$ die Geschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt t und $y''(t)$ die Beschleunigung der Kugel zum Zeitpunkt t.

Beachte, dass hier $y(t)$, $y'(t)$ und $y''(t)$ auch negativ sein können.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Federkraft direkt proportional zur Auslenkung der Kugel.



Wenn man die Reibungskraft vernachlässigt, erhält man eine **harmonische Schwingung**.
In diesem Fall folgt aus dem Zweiten Newtonschen Gesetz:

$$\underbrace{m \cdot y''(t)}_{\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}} = \overbrace{-k \cdot y(t)}^{\text{Federkraft}} \iff y''(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0 \quad \text{mit } k > 0\text{, denn:}$$

$$\begin{array}{lcl} y(t) = 0 & \iff & y''(t) = 0 \\ y(t) > 0 & \iff & y''(t) < 0 \\ y(t) < 0 & \iff & y''(t) > 0 \end{array}$$

Wir lösen diese Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \implies \lambda = \pm\sqrt{-\tfrac{k}{m}} = \pm i \cdot \sqrt{\tfrac{k}{m}} \implies y(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right)$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Lösung also eine allgemeine Sinusfunktion.

Bei einer **linear gedämpften Schwingung** wirkt zusätzlich eine Dämpfungskraft, die direkt proportional zur aktuellen Geschwindigkeit der Kugel ist. Dann gilt:

$$\underbrace{m \cdot y''(t)}_{\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}} = \overbrace{-k \cdot y(t)}^{\text{Federkraft}} \underbrace{- d \cdot y'(t)}_{\text{Dämpfungskraft}} \iff y''(t) + \frac{d}{m} \cdot y'(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0 \qquad d,\ k,\ m > 0$$

$$\lambda^2 + \frac{d}{m} \cdot \lambda + \frac{k}{m} = 0 \iff m \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + k = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m}$$

i) Schwingfall: $d^2 < 4 \cdot k \cdot m \implies \lambda_1$ und λ_2 sind nicht reell.

$$\implies y(t) = e^{-\frac{d}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{mit } \omega = \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{2 \cdot m}$$

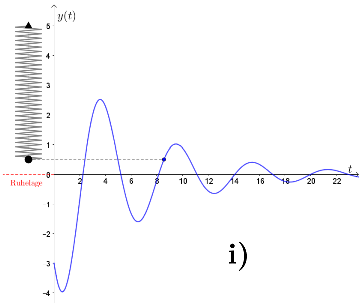
Die Dämpfungskonstante d ist in diesem Fall noch klein genug, dass die Ruhelage $y = 0$ periodisch durchquert wird.

ii) Aperiodischer Grenzfall: $d^2 = 4 \cdot k \cdot m \implies \lambda_1$ und λ_2 sind gleiche negative reelle Zahlen.

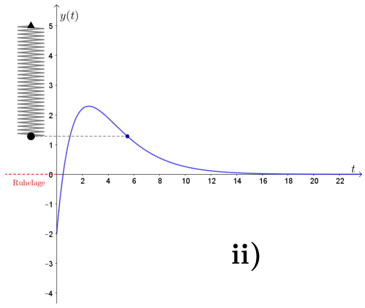
$$\implies y(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{d}{2 \cdot m} \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{d}{2 \cdot m} \cdot t}$$

iii) Kriechfall: $d^2 > 4 \cdot k \cdot m \implies \lambda_1$ und λ_2 sind verschiedene negative reelle Zahlen.

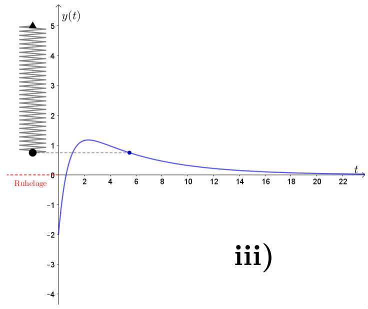
$$\implies y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$



i)



ii)



iii)

Eine inhomogene DGL $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t) - d \cdot y'(t) + s(t)$ kann man erhalten, wenn weitere externe Kräfte wirken.
Dann kann eine ungünstige Störfunktion eine Schwingung auslösen, bei der die Amplitude immer größer wird (Resonanzkatastrophe).