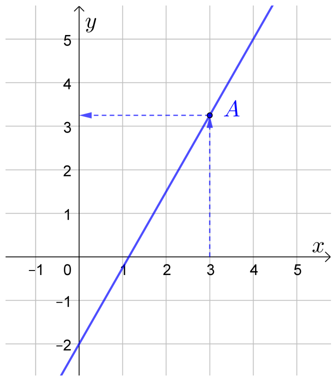
Von Geraden zu linearen Funktionen

Erinnere dich, dass die Lösungen $(x \mid y)$ der Gleichung $y = k \cdot x + d$ auf einer Gerade liegen, nämlich auf jener Gerade mit Steigung k, die durch den Punkt $(0 \mid d)$ verläuft.

Die Lösungen der Gleichung

$$y = \frac{7}{4} \cdot x - 2$$

sind im Koordinatensystem rechts dargestellt.



Der Punkt $A = (3 \mid y_A)$ liegt auf dieser Gerade. Berechne y_A.

$$y_A = \frac{7}{4} \cdot 3 - 2 = \frac{21}{4} - \frac{8}{4} = \frac{13}{4} = 3{,}25$$

Zu jeder Stelle x gibt es *genau einen* Wert y so, dass der Punkt $(x \mid y)$ auf der Gerade liegt.

Wir können also die Gleichung $y = k \cdot x + d$ als Zuordnung – zu jedem x *genau ein* y – auffassen.
Zur Verdeutlichung schreiben wir dann auch

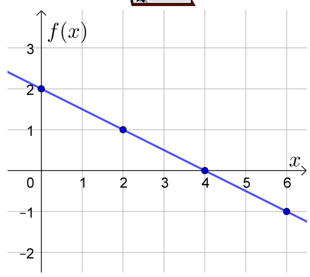
$$y(x) = \frac{7}{4} \cdot x - 2$$

„y von x ist gleich ...“

und sprechen von einer Funktionsgleichung.

Lineare Funktion

Jede Funktion f mit $\boldsymbol{f(x) = k \cdot x + d}$ heißt **lineare Funktion**.
Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.
An jeder Stelle x gibt es *genau einen* zugehörigen Funktionswert $f(x)$.



Zum Beispiel:

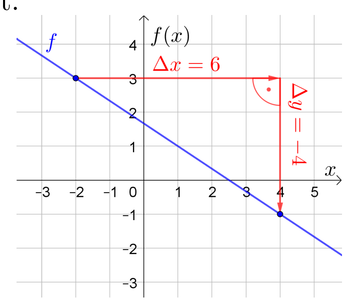
x	0	2	4	6
$f(x)$	2	1	0	−1

Funktionsgraph → Funktionsgleichung

Rechts unten ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.
Die Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ von f kannst du mit den folgenden Schritten aufstellen.

1) Suche 2 Punkte am Graphen, deren Koordinaten du exakt ablesen kannst.
Zeichne rechts das zugehörige Steigungsdreieck ein.

$A = (-2 \mid 3) \qquad B = (4 \mid -1)$



2) Berechne die Steigung k als Differenzenquotient.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

3) Setze k und die Koordinaten $(x \mid f(x))$ einer der beiden Punkte in $f(x) = k \cdot x + d$ ein.
Forme die Gleichung nach d um.

$$3 = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + d \quad \Longrightarrow \quad d = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

4) Schreibe als Endergebnis die Funktionsgleichung auf: $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{3}$

Funktionsgleichung → Funktionsgraph

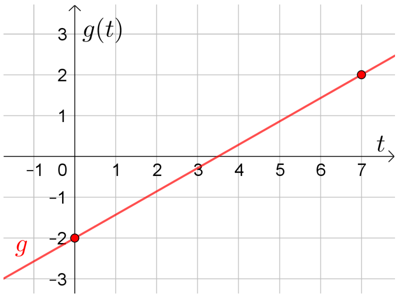
Für die lineare Funktion g gilt: $g(t) = \frac{4}{7} \cdot t - 2$

Rechts ist ein Ausschnitt des Koordinatensystems dargestellt.

Welche 2 Punkte in diesem Ausschnitt haben ganzzahlige Koordinaten *und* liegen auf dem Funktionsgraphen von g?

$g(0) = -2 \implies (0 \mid -2) \qquad g(7) = \frac{4}{7} \cdot 7 - 2 = 2 \implies (7 \mid 2)$

Zeichne den Funktionsgraphen von g rechts ein.



Schnittpunkt mit senkrechter Achse

Rechts ist der Graph der linearen Funktion h mit

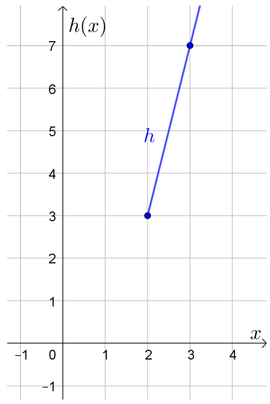
$$h(x) = k \cdot x + d$$

für $x \geq 2$ dargestellt. Ermittle d.

$$k = \frac{4}{1} = 4$$

Punkt $(2 \mid h(2))$ einsetzen und nach d umformen:

$$d = h(2) - k \cdot 2 = 3 - 4 \cdot 2 = -5$$



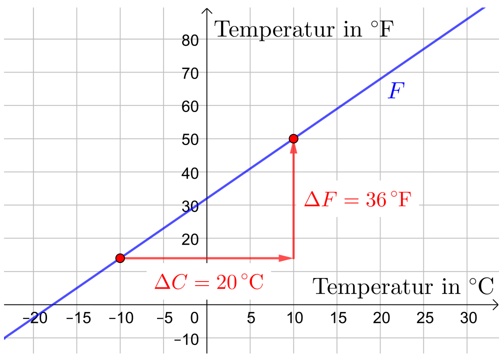
Temperatur

Temperaturen werden in verschiedenen Einheiten angegeben. Die Umrechnung von Grad Celsius (°C) in Grad Fahrenheit (°F) kann durch eine lineare Funktion F beschrieben werden:

$$F(C) = k \cdot C + d$$

$C \ldots$ Temperatur in °C
$F(C) \ldots$ umgerechnete Temperatur von °C auf °F

Der Funktionsgraph von F ist rechts dargestellt.



1) 10 °C entsprechen 50 °F, und −10 °C entsprechen 14 °F. Zeichne die zugehörigen Punkte am Graphen rechts ein.

2) Berechne die Steigung k und interpretiere diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta C} = \frac{50\,°\text{F} - 14\,°\text{F}}{10\,°\text{C} - -10\,°\text{C}} = \frac{36\,°\text{F}}{20\,°\text{C}} = 1{,}8\,°\text{F}/°\text{C}$$

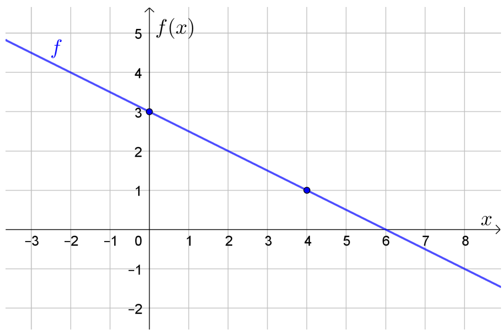
Eine Temperaturzunahme um 1 °C entspricht einer Temperaturzunahme um 1,8 °F.

3) Berechne d und interpretiere diesen Wert im gegebenem Sachzusammenhang.

$$d = F(10) - k \cdot 10 = 50 - 1{,}8 \cdot 10 = 32\,°\text{F}$$

Eine Temperatur von 0 °C entspricht einer Temperatur von 32 °F.

Input ↔ Output



Links ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.

a) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

Es gilt: $f(4) = 1$

Die Gleichung $f(x) = 4$ hat die Lösung $x = -2$.

Die Nullstelle von f ist die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, also $x = 6$.

b) Ermittle eine Funktionsgleichung von f.

c) Die Punkte $A = (42 \mid -18)$ und $B = (-78 \mid 42)$ liegen am Funktionsgraphen von f.

Berechne jeweils die fehlende Koordinate.

$$f(x) = k \cdot x + d \qquad \text{mit} \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{4} = -0{,}5 \quad \text{und} \quad d = 3$$

$$\implies f(x) = -0{,}5 \cdot x + 3$$

$$f(42) = -0{,}5 \cdot 42 + 3 = -18$$

$$f(x) = 42 \iff 42 = -0{,}5 \cdot x + 3 \iff 39 = -0{,}5 \cdot x \iff x = -78$$

Schnittpunkt

Eine Firma produziert Smartphones. Die Gesamtkosten K und die Gesamteinnahmen E (Erlös) hängen von der Anzahl der produzierten und verkauften Smartphones ab.

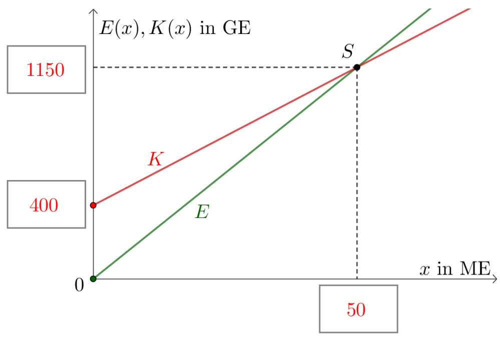
Für die sogenannte **Kostenfunktion K** und die **Erlösfunktion E** gilt bei dieser Firma:

$$K(x) = 15 \cdot x + 400$$

$$E(x) = 23 \cdot x$$

x ... produzierte/verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE)
$E(x)$ ... Gesamteinnahmen in Geldeinheiten (GE)

Zum Beispiel: 1 ME = 1 Smartphone, 1 GE = € 30



1) Die **Fixkosten** sind jene Kosten, die bei Produktion von 0 ME anfallen. Zum Beispiel: Miete, Gehälter
Ermittle die Fixkosten und trage sie in das richtige Kästchen rechts oben ein.

2) Berechne den Schnittpunkt S der beiden Funktionsgraphen.
Interpretiere die beiden Koordinaten des Schnittpunkts im Sachzusammenhang.

$$K(x) = E(x) \iff 15 \cdot x + 400 = 23 \cdot x \iff 400 = 8 \cdot x \iff x = 50\,\text{ME}$$

$$K(50) = E(50) = 1150\,\text{GE}$$

Wenn 50 ME produziert und verkauft werden, dann sind die Kosten und Einnahmen mit 1150 GE gleich.

Bezeichnungen in der Kosten- und Preistheorie: **Untere Gewinngrenze**, **Gewinnschwelle** bzw. **Break-even-Point**