Matrizen

Die rechts dargestellte **Matrix** A hat 4 Zeilen und 2 Spalten.
Es ist also eine $4 \times 2-$Matrix. Sprechweise: „4 mal 2 – Matrix"
Mit $a_{32} = 8$ bezeichnen wir jenen Eintrag, der in der 3. Zeile und 2. Spalte ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 9 \\ 0 & 8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Jede Matrix mit einer einzigen Spalte bzw. Zeile ist ein Vektor (Spaltenvektor bzw. Zeilenvektor).

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Links ist die $3 \times 4-$**Nullmatrix** N dargestellt.

Rechts ist die $3 \times 3-$**Einheitsmatrix** E dargestellt.
Jede Einheitsmatrix ist quadratisch, hat in der Diagonale von links oben nach rechts unten nur 1er und überall sonst nur 0er.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizenaddition

Wenn zwei Matrizen A und B in ihrer Zeilenanzahl und in ihrer Spaltenanzahl übereinstimmen, dann können wir sie komponentenweise addieren. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \implies A + B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Matrizenaddition

Berechne das Ergebnis.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -7 & 3 & -8 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Nullmatrizen sind die neutralen Elemente der Matrizenaddition.

Matrizenmultiplikation

Die Multiplikation zweier Matrizen erfolgt *nicht* komponentenweise.
Wenn A eine $m \times p-$Matrix und B eine $p \times n-$Matrix ist, dann ist $C = A \cdot B$ eine $m \times n-$Matrix.
Zum Beispiel:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-5} \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 4} \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & \mathbf{2} & -1 \\ -2 & \mathbf{-3} & -4 \\ 3 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & \mathbf{4} & -7 \end{pmatrix}}_{4\times 3} \implies C = A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & \mathbf{-15} & 17 \\ 34 & 12 & 30 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

Um den Eintrag $c_{12} = \mathbf{-15}$ in Zeile 1 und Spalte 2 von $C = A \cdot B$ zu berechnen, verwendet man die Zeile 1 von A und die Spalte 2 von B folgendermaßen:

$$c_{12} = \mathbf{4} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \cdot (\mathbf{-3}) + (\mathbf{-2}) \cdot \mathbf{0} + (\mathbf{-5}) \cdot \mathbf{4} = 8 - 3 + 0 - 20 = \mathbf{-15}$$

Um allgemein den Eintrag c_{ij} in Zeile i und Spalte j von $C = A \cdot B$ zu berechnen, verwendet man die Zeile i von A und die Spalte j von B folgendermaßen:

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

Matrizenmultiplikation

Berechne das Ergebnis.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -10 & 27 & -27 \\ -9 & -6 & 22 & -51 \\ 3 & 12 & -39 & 72 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Einheitsmatrizen sind die neutralen Elemente der Matrizenmultiplikation.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

Die Matrizenmultiplikation erfüllt im Allgemeinen *nicht* das Kommutativgesetz: $A \cdot B \neq B \cdot A$

LGS in 2 Variablen (Matrizenschreibweise)

Schreibe das folgende lineare Gleichungssystem in 2 Variablen in Matrizenschreibweise.
Trage dazu Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$$\begin{cases} 4 \cdot x - 2 \cdot y = 10 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y = -8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

LGS in 3 Variablen (Matrizenschreibweise)

Schreibe das folgende lineare Gleichungssystem in 3 Variablen in Matrizenschreibweise.

$$\begin{cases} 3 \cdot x + y - 4 \cdot z = 5 \\ -2 \cdot x + 4 \cdot z = -3 \\ x - 2 \cdot y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS in n Variablen (Matrizenschreibweise)

Allgemein können wir jedes lineare Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ folgendermaßen in **Matrizenschreibweise** angeben:

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix}$$

Wir schreiben dafür auch kurz: $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$

Inverse Matrix

Genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine *eindeutige* Lösung $\vec{x}$ hat, hat die Matrix A eine zugehörige **inverse Matrix $\boldsymbol{A^{-1}}$**. Für diese gilt:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A =} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{\textbf{Einheitsmatrix}}$$

Zur Berechnung der inversen Matrix gibt es den Gauß-Jordan-Algorithmus.

LGS mit inverser Matrix lösen MmF

Genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine *eindeutige* Lösung $\vec{x}$ hat, können wir diese mithilfe der zugehörigen inversen Matrix A^{-1} berechnen:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\text{Einheitsmatrix}} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$$

LGS mit inverser Matrix lösen MmF

Löse das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} x + y + 3 \cdot z = -1 \\ -x + 2 \cdot z = -2 \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y - z = 7 \end{cases}$ mit folgenden 3 Schritten:

1) Stelle das lineare Gleichungssystem in Matrizenschreibweise $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dar.

2) Zeige, dass $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -9 & 16 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ tatsächlich die inverse Matrix von A ist.

Anmerkung: Wenn die Einträge der Matrizen reelle Zahlen sind, dann kann man aus $A \cdot A^{-1} = \text{Einheitsmatrix}$ automatisch auch $A^{-1} \cdot A = \text{Einheitsmatrix}$ folgern und umgekehrt. Als Probe genügt also eine dieser beiden Matrizenmultiplikationen.

3) Berechne mithilfe von A^{-1} die Lösung $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems.

1) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

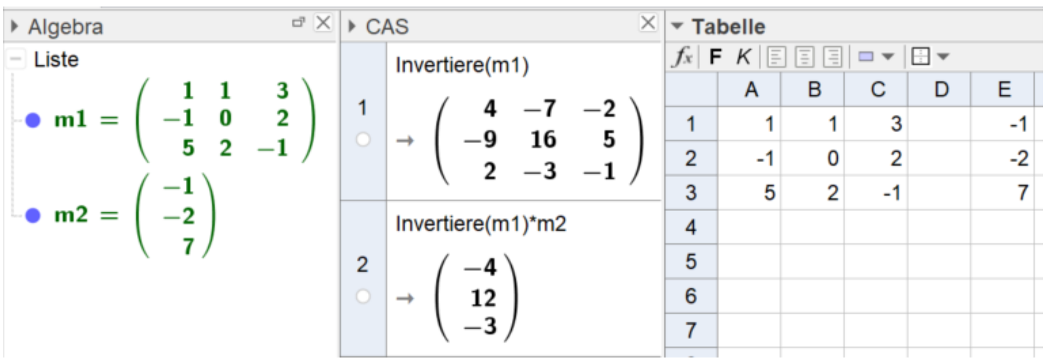
2) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -9 & 16 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

3) $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -9 & 16 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist also $x = -4, \; y = 12, \; z = -3$.

LGS mit inverser Matrix lösen MmF

Du *kannst* das vorherige Gleichungssystem in GeoGebra wie folgt mit Matrizen lösen:



Um eine Matrix zu erzeugen, markiere die Zellen in der Tabellenansicht $\rightsquigarrow$ Rechtsklick $\rightsquigarrow$ Erzeugen $\rightsquigarrow$ Matrix.

Zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit GeoGebra bringt die Matrizenschreibweise *keine* Vorteile.

Zahlenrätsel

Für drei Zahlen x, y und z gilt:

- Die größte Zahl x ist um 42 kleiner als die Summe der beiden anderen Zahlen.
- Die kleinste Zahl z ist um 40 % kleiner als die größte Zahl.
- Das arithmetische Mittel der größten und kleinsten Zahl ist um 8 kleiner als die dritte Zahl y.

1) Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung von x, y und z in Matrizenschreibweise.

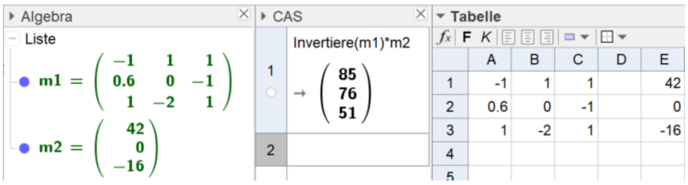
2) Löse das Gleichungssystem mit Technologieeinsatz.

1) $\text{I}: \ x + 42 = y + z \quad \Longleftrightarrow \quad -x + y + z = 42$

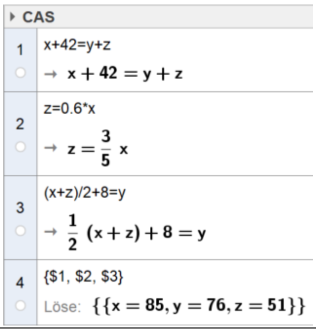
$\text{II}: \ z = 0{,}6 \cdot x \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}6 \cdot x - z = 0$

$\text{III}: \ \frac{x+z}{2} + 8 = y \quad \Longleftrightarrow \quad x + z + 16 = 2 \cdot y \quad \Longleftrightarrow \quad x - 2 \cdot y + z = -16$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0{,}6 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

2) 

oder



Die drei Zahlen sind $x = 85$, $y = 76$ und $z = 51$.

Umgekehrte Kurvenuntersuchung

Die Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ hat die folgenden Eigenschaften:

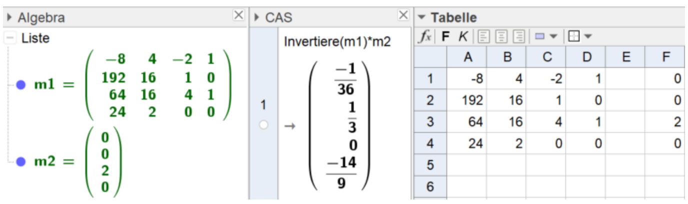
- Die Funktion hat die Nullstelle $x = -2$.
- Die Funktion wechselt an der Stelle $x = 8$ das Monotonieverhalten.
- Die Funktion hat den Wendepunkt $W = (4 \mid 2)$.

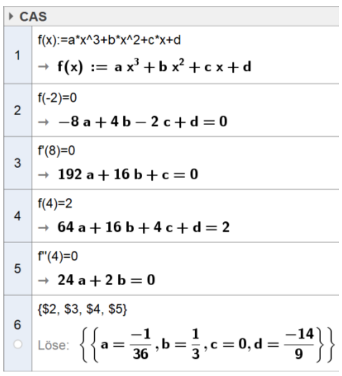
1) Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung von a, b, c und d in Matrizenschreibweise.

2) Ermittle die Koeffizienten a, b, c und d mit Technologieeinsatz.

1) $\text{I}: \ f(-2) = 0$
$\text{II}: \ f'(8) = 0$
$\text{III}: \ f(4) = 2$
$\text{IV}: \ f''(4) = 0$

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 192 & 16 & 1 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) 



$\Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{36}, \ b = \frac{1}{3}, \ c = 0, \ d = -\frac{14}{9}$