Kleine Lösungsformel

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ sind

$$\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}\,.$$

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen.

Quadratische Gleichung → Lösungen

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 42 = 0$.

$$x^2 + 4 \cdot x - 21 = 0$$

$$p = 4,\ q = -21 \implies x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm 5 \implies x_1 = 3,\ x_2 = -7$$

Produkt-Null-Satz

Berechne ohne Taschenrechner: $\pi^{10} \cdot \sqrt{5 - 3} \cdot (-3)^7 \cdot 42 \cdot 0 \cdot (4 - 7^2) = 0$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.

Lösungen → Quadratische Gleichung

Gesucht ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen -4 und 2.

1) Fülle die Lücken unten so aus, dass beide Zahlen -4 und 2 Lösungen der Gleichung sind.

2) Multipliziere die Klammern aus.

$$0 = (x - 2) \cdot (x - (-4)) = (x - 2) \cdot (x + 4) = x^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot x - 8 = x^2 + 2 \cdot x - 8$$

Lösungen ↔ Koeffizienten

Die quadratische Gleichung

$$0 = (x - 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 2 \cdot x - 5 \cdot x + 10 = x^2 - 7 \cdot x + 10$$

hat die Lösungen 2 und 5.

Die Koeffizienten -7 und 10 sind eng mit den beiden Lösungen verknüpft. Hast du eine Vermutung?

$10 = 2 \cdot 5$
$-7 = -(2 + 5)$

Lösungen ↔ Koeffizienten

Die quadratische Gleichung

$$0 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + p \cdot x + q$$

hat die Lösungen x_1 und x_2. Wir multiplizieren aus und heben x heraus:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - x_1 \cdot x - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

Vergleiche die Koeffizienten: $p = -x_1 - x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$.

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn gilt:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q}$$

Mit den Lösungen können wir den quadratischen Term in **Linearfaktoren** zerlegen:

$$x^2 + p \cdot x + q = \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Linearfaktor}}$$

Satz von Vieta – Beweis

Wenn x_1 und x_2 die Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ sind, dann gilt

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Rechne nach, dass $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ gilt. Tipp: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Sind umgekehrt x_1 und x_2 zwei Zahlen mit $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$, dann gilt

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + p \cdot x + q.$$

Setzen wir auf der linken Seite für x die Zahl x_1 oder x_2 ein, ist das Ergebnis 0.
Also muss auch die rechte Seite 0 sein, wenn wir für x die Zahl x_1 oder x_2 einsetzen.
x_1 und x_2 sind also Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Teiler von q

$x^2 + p \cdot x + q = 0$ ist eine quadratische Gleichung mit $p, q \in \mathbb{Z}$.
Begründe folgende Behauptungen für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung.

1) *„Wenn $x_1 \in \mathbb{Z}$ ist, dann muss auch $x_2 \in \mathbb{Z}$ sein."*

$$x_1 + x_2 = -p \implies x_2 = \underbrace{-p}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{x_1}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

2) *„Wenn eine Lösung ganzzahlig ist, dann sind beide Lösungen Teiler von q."*

Wegen **1)** sind beide Lösungen ganzzahlig.
Wegen $x_1 \cdot x_2 = q$ sind beide Lösungen Teiler von q.

Zerlegung in Linearfaktoren

Zerlege in Linearfaktoren und ermittle die Lösungen. Alle Lösungen sind ganzzahlig.

a) $x^2 - 6 \cdot x - 7 = 0$

$$x^2 - 6 \cdot x - 7 = (x-7) \cdot (x+1) = 0 \implies x_1 = 7,\ x_2 = -1$$

b) $x^2 + 8 \cdot x + 15 = 0$

$$x^2 + 8 \cdot x + 15 = (x+3) \cdot (x+5) = 0 \implies x_1 = -3,\ x_2 = -5$$

c) $2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 42 = 0$

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 42 = 2 \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 21) = 2 \cdot (x-3) \cdot (x+7) = 0 \implies x_1 = 3,\ x_2 = -7$$