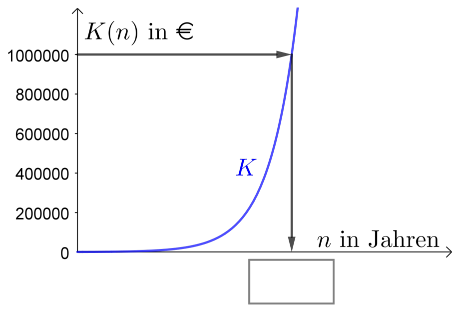
Lösung einer Exponentialgleichung ertasten MmF

Ein Kapital von 500 € wächst jährlich um 2 %.
Für das Kapital $K(n)$ nach n Jahren gilt also:

$K(n) =$ ☐

Wie viele Jahre würde es dauern, bis das Kapital auf 1 Million € anwächst? Taste dich mit dem Taschenrechner heran.

Trage deinen Näherungswert in das Kästchen rechts ein.



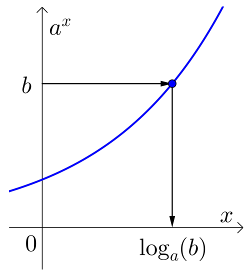
Logarithmus MmF

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion mit $x \mapsto a^x$.

Da jede Exponentialfunktion entweder streng monoton steigend oder fallend ist, hat die Gleichung $a^x = b$ für alle $b > 0$ eine *eindeutige* Lösung x.

Diese Lösung heißt **Logarithmus von *b* zur Basis *a***:

$$a^x = b \iff x = \boldsymbol{\log_a(b)} \qquad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$



Logarithmen händisch berechnen MmF

Wenn wir $\log_a(b)$ berechnen, denken wir also: „*a hoch welche Zahl ergibt b*?“ $a^? = b$

a) $\log_{10}(1000) =$ ☐, weil $10^{☐} = 1000$.

b) $\log_7(49) =$ ☐, weil ☐.

c) $\log_2(16) =$ ☐, weil ☐.

d) $\log_2(0{,}5) =$ ☐, weil ☐.

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) =$ ☐, weil ☐.

f) $\log_{42}(42^2) =$ ☐, weil ☐.

g) $\log_b(b) =$ ☐, weil ☐.

h) $\log_b(1) =$ ☐, weil ☐.

Logarithmus am Taschenrechner MmF

Die Basis 10 und die Basis e kommen so oft vor, dass dein Taschenrechner eigene Tasten dafür hat:

Zehnerlogarithmus (Basis 10) $\rightsquigarrow$ LOG
Kurzschreibweise: $\boldsymbol{\log_{10}(b) = \lg(b)}$

Natürlicher Logarithmus (Basis e) $\rightsquigarrow$ LN
Kurzschreibweise: $\boldsymbol{\log_e(b) = \ln(b)}$

Du kannst auch Logarithmen mit jeder anderen Basis a ($a > 0$, $a \neq 1$) auf deinem Taschenrechner ermitteln. Es gilt nämlich: $\boldsymbol{\log_a(b) = \dfrac{\lg(b)}{\lg(a)} = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}}$

Eine Begründung dafür findest du auf der letzten Seite.

Lösung einer Exponentialgleichung berechnen MmF

Löse die Gleichung $500 \cdot 1{,}02^n = 1\,000\,000$.

Rechenregeln für Logarithmen

Die folgenden **Rechenregeln für Logarithmen** gelten für alle $x, y > 0$: Begründungen auf letzter Seite

i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ Aus „mal" wird beim Aufteilen „plus".

ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ Aus „durch" wird beim Aufteilen „minus".

iii) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ Aus „hoch r" wird beim Aufteilen „mal r".

⚠ Im Allgemeinen gilt: $\log_a(x+y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$ bzw. $\log_a(x-y) \neq \log_a(x) - \log_a(y)$

Logarithmen zerlegen

Zerlege den Term so weit wie möglich.

a) $\ln\left(\frac{5 \cdot x^2}{y \cdot z}\right) =$

b) $\lg\left(\frac{(42 \cdot x^2 + 1)^{10}}{y^5 - 3}\right) =$

Alternativer Lösungsweg

Löse die Gleichung $500 \cdot 1{,}02^n = 1\,000\,000$ mithilfe von Rechenregel **iii)**.

Exponentialgleichungen lösen

Löse die Gleichung $7 \cdot 2^{3 \cdot x - 1} - 350 = 0\,.$

Wenn x nur im Exponenten einer Potenz vorkommt, dann …

i) … forme nach dieser Potenz um.

ii) … logarithmiere beide Seiten der Gleichung.

iii) … forme nach x um.

Verdopplungszeit

Der Wert eines Sparbuchs mit 300 € Kapital wächst pro Jahr effektiv um 0,8 %.

1) $K(n)$ ist der Wert des Sparbuchs nach n Jahren. Stelle eine Funktionsgleichung auf.

$K(n) =$ $\boxed{}$

2) Berechne die **Verdopplungszeit**. Das ist jene Zeitdauer, nach der sich der Wert des Sparbuchs verdoppelt hat.

Halbwertszeit

Das im Jahr 1986 in Tschernobyl freigesetzte Cäsium-137 zerfällt annähernd nach folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}023\,043 \cdot t}$$

$t \ldots$ Zeit in Jahren ($t = 0$ ist das Jahr 1986.)
$N(t) \ldots$ vorhandene Menge Cäsium-137 zum Zeitpunkt t
$N_0 \ldots$ freigesetzte Menge Cäsium-137 im Jahr 1986

Berechne die **Halbwertszeit**. Das ist jene Zeitdauer, nach der sich die vorhandene Menge Cäsium-137 halbiert hat.

Umkehrfunktionen

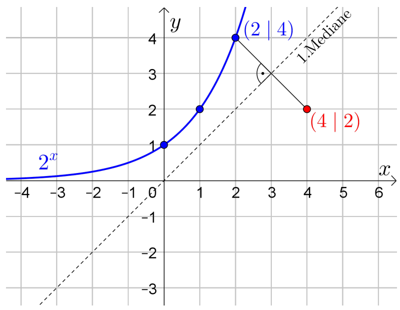
Die Logarithmusfunktion g mit

$$\boldsymbol{g(x) = \log_a(x)}$$

ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = a^x} \quad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1.$$

Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.



Für jeden Punkt $(x \mid a^x)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(a^x \mid x)$ am Graphen von g.

Rechts oben ist der Graph der Exponentialfunktion mit $x \mapsto 2^x$ dargestellt. $g(a^x) = \log_a(a^x) = x$ ✓
Skizziere rechts oben den Graphen der Logarithmusfunktion mit $x \mapsto \log_2(x)$.

Der Graph jeder Exponentialfunktion mit $x \mapsto a^x$ verläuft durch den Punkt $(0 \mid \boxed{})$.
Also verläuft der Graph jeder Logarithmusfunktion mit $x \mapsto \log_a(x)$ durch den Punkt $(\boxed{} \mid 0)$.

Da $a^x = -1$ *keine* Lösung in $\mathbb{R}$ hat, ist $\log_a(-1)$ *keine* reelle Zahl. Es gilt $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Allgemein ist $\log_a(x)$ deshalb über der Grundmenge $\mathbb{R}$ nur für $x > 0$ definiert.

Tatsächlich kann man Potenzen auch für Exponenten definieren, die komplexe Zahlen sind. Dann gilt: $e^{i \cdot \pi} = -1$

Logarithmen aufheben

Aus der Definition des Logarithmus

$$a^x = b \quad \iff \quad x = \log_a(b) \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

folgt: $\boldsymbol{a^{\log_a(b)}} = \boxed{}$ „a hoch" und „Logarithmus zur Basis a" heben einander auf.

Das hilft, wenn bei einer Gleichung die gesuchte Variable im Argument eines Logarithmus vorkommt:

$$\lg(x) = 42 \iff \log_{10}(x) = 42 \iff 10^{\log_{10}(x)} = 10^{42} \iff x = 10^{42}$$
$$\ln(x) = 42 \iff \log_e(x) = 42 \iff e^{\log_e(x)} = e^{42} \iff x = e^{42}$$

Logarithmusgleichungen lösen

Löse die Gleichung $\dfrac{\ln(5 - 42 \cdot x)}{3} - 2 = 0\,.$

Wenn x nur in einem Logarithmus $\log_a(☺)$ vorkommt, dann …

i) … forme nach diesem Logarithmus um.

ii) … rechne „a hoch“ auf beiden Seiten der Gleichung.

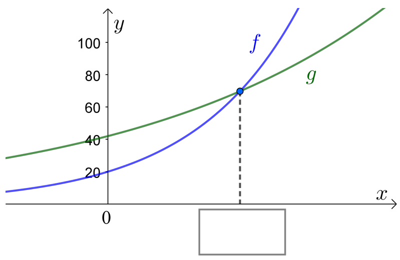
iii) … forme nach x um.

Schnittstelle

Rechts sind die Graphen der Exponentialfunktionen f und g mit

$$f(x) = 20 \cdot 1{,}05^x \quad \text{und} \quad g(x) = 42 \cdot 1{,}02^x$$

dargestellt. Berechne die Schnittstelle.



Begründungen der Rechenregeln

Die Rechenregeln für Logarithmen folgen aus den Rechenregeln für Potenzen:

1) $a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = \boxed{}$ Also gilt: $\log_a(x \cdot y) = \boxed{}$

2) $a^{\log_a(x)-\log_a(y)} = \dfrac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ Also gilt: $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \boxed{}$

3) $a^{r \cdot \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^r = \boxed{}$ Also gilt: $\log_a(x^r) = \boxed{}$

Die Umrechnungsregel $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ folgt dann aus den Rechenregeln für Logarithmen:

$$a^x = b \iff \ln(a^x) = \ln(b) \overset{\textbf{3)}}{\iff} x \cdot \ln(a) = \ln(b) \iff x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Also gilt: $a^{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}} = \boxed{}$ bzw. $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$