Lokale Änderungsrate – Quadratische Funktion

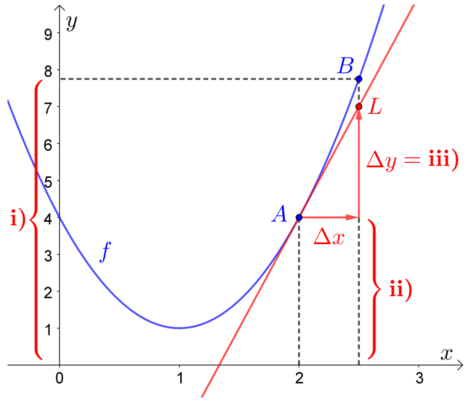
Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4$$

ist rechts dargestellt.

Der Punkt $A = (2 \mid 4)$ liegt am Funktionsgraphen.

Die Tangente im Punkt A sowie ein zugehöriges Steigungsdreieck mit $\Delta x = 0{,}5$ sind eingezeichnet.



1) Berechne den Wert von Δy in diesem Steigungsdreieck. Welche Koordinaten hat der Punkt L auf der Tangente?

$$f'(x) = 6 \cdot x - 6 \implies f'(2) = 6 \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 \implies \Delta y = 6 \cdot \Delta x = 3$$

$$\implies L = (2{,}5 \mid 7)$$

Es gilt: $\underbrace{f(2 + \Delta x)}_{\text{i)}} \approx \underbrace{f(2)}_{\text{ii)}} + \underbrace{f'(2) \cdot \Delta x}_{\text{iii)}} \qquad (\star)$

2) Veranschauliche **i)**, **ii)** und **iii)** im Bild rechts oben.

3) Um wieviel ist die rechte Seite von $(\star)$ kleiner als die linke Seite? Berechne diese Differenz.

„Absoluter Fehler"

$$f(2 + \Delta x) = f(2{,}5) = 7{,}75$$

$$f(2) + f'(2) \cdot \Delta x = 4 + 6 \cdot 0{,}5 = 7$$

Die rechte Seite ist also um 0,75 kleiner als die linke Seite.

4) Um wieviel Prozent ist die rechte Seite von $(\star)$ kleiner als die linke Seite?

„Relativer/Prozentueller Fehler"

$$\frac{7}{7{,}75} = 0{,}9032\ldots = 90{,}32\ldots\,\%$$

Die rechte Seite ist also um $100\,\% - 90{,}32\ldots\,\% = 9{,}67\ldots\,\%$ kleiner als die linke Seite.

Oder: $\frac{0{,}75}{7{,}75} = 0{,}0967\ldots = 9{,}67\ldots\,\%$

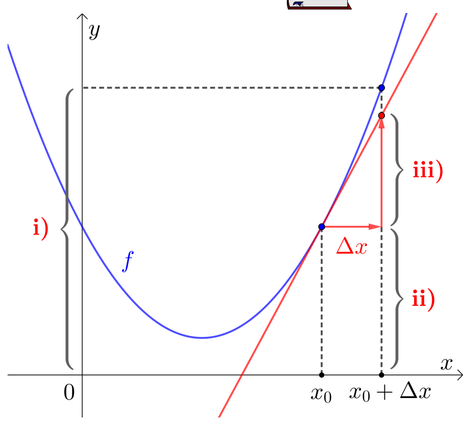
Lokale Änderungsrate

Mithilfe der **lokalen Änderungsrate $f'(x_0)$** können wir Funktionswerte von f nahe bei x_0 *näherungsweise* berechnen:

$$\underbrace{\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x)}}_{\text{i)}} \approx \underbrace{\boldsymbol{f(x_0)}}_{\text{ii)}} + \underbrace{\boldsymbol{f'(x_0) \cdot \Delta x}}_{\text{iii)}}$$

In Worten: Die Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0 + \Delta x)$ liegen *ungefähr* $f'(x_0) \cdot \Delta x$ auseinander.

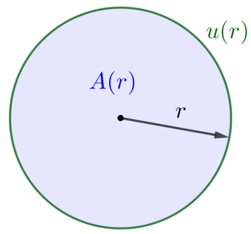
Trage **i)**, **ii)** und **iii)** rechts in die Kästchen richtig ein.



Der Satz von Taylor gibt auch an, wie weit diese Funktionswerte tatsächlich auseinander liegen.

Kreis

Der Flächeninhalt A und der Umfang u eines Kreises hängen von seinem Radius r ab:



$$A(r) = \pi \cdot r^2 \quad \text{und} \quad u(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$$

1) Für die Ableitungsfunktion von A gilt: $A'(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$

Was fällt dir auf? $A'(r) = u(r)$

Der Radius eines Kreises mit Radius $r = 4\,\text{cm}$ wird um $\Delta r = 0{,}2\,\text{cm}$ vergrößert.

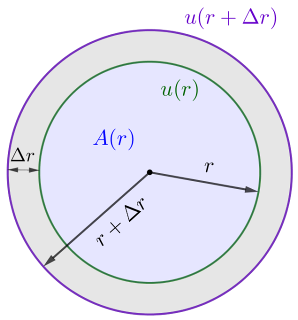
Dabei gilt wie zuvor: $A(r + \Delta r) \approx A(r) + A'(r) \cdot \Delta r$

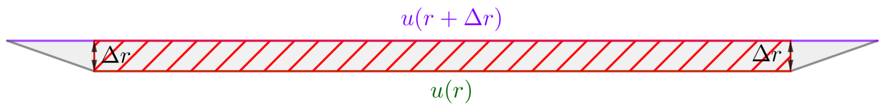
2) Um wie viel cm^2 wird der Flächeninhalt des Kreises also ungefähr größer?

$$A(4 + 0{,}2) \approx A(4) + 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 0{,}2 = A(4) + 5{,}02...$$

Der Flächeninhalt wird ungefähr um $5{,}02...\,\text{cm}^2$ größer.

Der unten dargestellte Kreisring und das Trapez haben tatsächlich den gleichen Flächeninhalt:





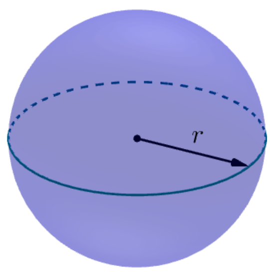
Mit größer werdendem Radius r wächst der Umfang $u(r)$ linear.

Rechne nach, dass der Kreisring und das Trapez den gleichen Flächeninhalt haben.

3) Markiere im Trapez rechts oben eine Fläche mit Inhalt $A'(r) \cdot \Delta r$.

Kugel

Das Volumen V einer Kugel hängt von ihrem Radius r ab:



$$V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad (r \text{ in cm}, V(r) \text{ in cm}^3)$$

Für die Ableitungsfunktion von V gilt: $V'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Welche Einheit hat $V'(r)$? Welche geometrische Bedeutung hat $V'(r)$?

$V'(r)$ hat die Einheit $\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}} = \text{cm}^2$.

$V'(r)$ ist die Oberfläche der Kugel mit Radius r.

$\sqrt{4{,}2}$

Für die 1. Ableitung der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Schätze mithilfe von $f(4) = \sqrt{4}$ den Wert von $f(4{,}2) = \sqrt{4{,}2}$ ab.

$$f(4{,}2) = f(4 + 0{,}2) \approx f(4) + f'(4) \cdot 0{,}2 = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = 2{,}05$$