

Georg Cantor (1895): „Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus: $M = \{m\}$ “

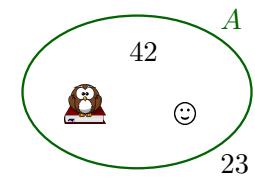
Die rechts dargestellte Menge A besteht aus den drei verschiedenen Elementen ☺, 42 und .

Wir schreiben dafür kurz: $A = \{\text{☺}, 42, \text{penguin}\}$

Die Zahl 42 ist ein Element der Menge A , kurz: $42 \in A$

Die Zahl 23 ist *kein* Element der Menge A , kurz: $23 \notin A$

Die Menge A besteht aus drei verschiedenen Elementen, kurz: $|A| = 3$



„Die Mächtigkeit von A ist 3.“

Eine Menge kann auch aus unendlich vielen Elementen bestehen, zum Beispiel die Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Eine Menge kann auch gar keine Elemente enthalten, nämlich die leere Menge, kurz: $\{\}$ oder $\emptyset$

Auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Menge kommt es *nicht* an.

Wesentlich ist für jedes Objekt nur, ob es ein Element der Menge ist oder nicht, zum Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

Im Gegensatz dazu kommt es bei **Folgen** auf die Reihenfolge an: $(1, 2, 3) \neq (3, 1, 2)$

Aufzählende Darstellung / Beschreibende Darstellung



Die Menge $A = \{\text{☺}, 42, \text{penguin}\}$ ist in **aufzählender Darstellung** gegeben. Alle 3 Elemente sind „aufgezählt“.

Die Menge $B = \{3, 5, 7, \dots\}$ besteht aus unendlich vielen Elementen, aber aus welchen?

Lukas meint: „Das ist die Menge der ungeraden Zahlen ab 3, also: $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots\}$ “

Finn meint: „Das ist die Menge der **Primzahlen** ab 3, also: $B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$ “

Mithilfe **beschreibender Darstellungen** können wir die Menge $\{3, 5, 7, \dots\}$ *eindeutig* festlegen:

Menge der ungeraden Zahlen ab 3

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade und } n \geq 3\}$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2 \cdot k + 3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Menge der Primzahlen ab 3

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl und } n \geq 3\}$$

einschränkende Bedingung

Links vom senkrechten Strich | steht, welche Objekte überhaupt nur in der Menge enthalten sein können.

Nur, wenn ein Objekt auch die Bedingung *rechts* vom senkrechten Strich | erfüllt, ist es in der Menge enthalten.

Sprechweise: „Menge aller natürlichen Zahlen, für die gilt ...“

Beschreibende Darstellung



Kreuze genau jene Zahlen an, die in der Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 42\}$ enthalten sind.

☐ -5 ☒ 12 ☐ $\frac{23}{2}$ ☒ 42 ☐ 87 ☒ $\frac{80}{2}$

Teilmenge / Obermenge

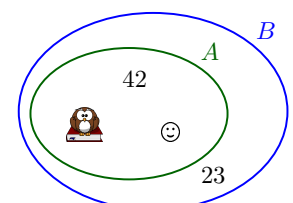


Im **Mengendiagramm** rechts unten ist jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B .

Genau dann ist A eine **Teilmenge** von B bzw. B eine **Obermenge** von A ,

und wir schreiben dafür kurz:

$$A \subseteq B \text{ bzw. } B \supseteq A$$



Für ihre Mächtigkeiten gilt in diesem Fall $|A| \leq |B|$ bzw. $|B| \geq |A|$.



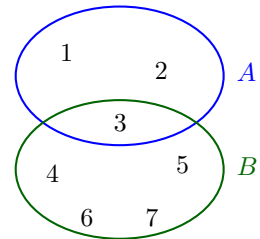
Jede natürliche Zahl ist auch eine **ganze Zahl**, also ein Element von $\mathbb{Z}$.
 Jede ganze Zahl ist auch eine **rationale Zahl**, also ein Element von $\mathbb{Q}$.
 Jede rationale Zahl ist auch eine **reelle Zahl**, also ein Element von $\mathbb{R}$.
 Trage jeweils das richtige Symbol $\subseteq$ bzw. $\supseteq$ in das Kästchen ein:

- a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e) $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{N}$ f) $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Z}$



Im Mengendiagramm rechts unten sind zwei Mengen A und B dargestellt.

- Die **Durchschnittsmenge** $A \cap B$ besteht aus jenen Elementen, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
Im Beispiel rechts gilt also: $A \cap B = \{3\}$
- Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ besteht aus jenen Elementen, die in zumindest einer der beiden Mengen A oder B enthalten sind.
Im Beispiel rechts gilt also: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

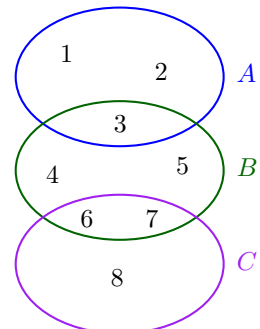


- Die **Differenzmenge** $A \setminus B$ besteht aus jenen Elementen, die in A enthalten sind, aber *nicht* in B .
Im Beispiel rechts gilt also: $A \setminus B = \{1, 2\}$



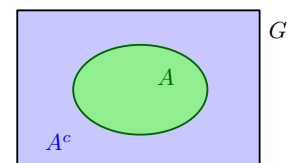
Im Mengendiagramm rechts unten sind drei Mengen A , B und C dargestellt.
 Gib die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an.

- a) $B \cap C = \{6, 7\}$ $A \cap C = \{ \}$
 b) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A \cup C = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$
 c) $B \setminus C = \{3, 4, 5\}$ $A \setminus C = \{1, 2, 3\}$
 d) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup \{6, 7\} = \{1, 2, 3, 6, 7\}$



Das **Komplement** von A bezüglich einer Grundmenge G ist $G \setminus A$.

Ist zum Beispiel $G = \mathbb{N}$ und A die Menge der geraden natürlichen Zahlen, dann ist das Komplement von A die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.
 Ist G bekannt, dann kürzen wir das Komplement von A mit A^c bzw. A' ab.



Gib das Komplement von A bezüglich der angegebenen Grundmenge G in aufzählender Darstellung an.

- a) $G = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ $\implies A^c = \{3\}$
 b) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2\}$ $\implies A^c = \{3, 4, 5\}$
 c) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{ \}$ $\implies A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 d) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\implies A^c = \{ \}$

a) Kreuze genau jene Mengen an, die Teilmengen von $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind.

☒ $\{1, 3\}$ ☐ $\{2, 6\}$ ☒ $\{\}$ ☒ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ☒ $\{2, 3, 5\}$

b) Wie viele verschiedene Teilmengen hat $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ insgesamt?

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir die **Multiplikationsregel** aus der Kombinatorik:

Beim Zusammenstellen einer Teilmenge von A können wir für jedes ihrer 5 Elemente *unabhängig* voneinander entscheiden, ob es in der Teilmenge enthalten sein soll ($\in$) oder nicht ($\notin$).

Entscheiden wir uns zum Beispiel wie rechts dargestellt, dann erhalten wir die Teilmenge $\{1, 4, 5\}$.

	1	2	3	4	5
$\in$	☒	☐	☐	☒	☒
$\notin$	☐	☒	☒	☐	☐

Für die Anzahl verschiedener Teilmengen von A gilt also: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Die **Potenzmenge** einer Menge A besteht aus allen Teilmengen von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ abgekürzt. Zum Beispiel hat $A = \{1, 2, 3\}$ die folgende Potenzmenge, die aus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Elementen besteht:

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

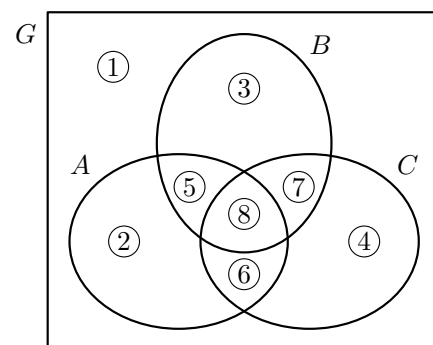
Wenn A aus n Elementen besteht, dann besteht ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ aus 2^n Elementen.

Die Mengen A , B und C sind Teilmengen einer Grundmenge G .

Für jedes Element (n) der Grundmenge G gilt:

- (n) ist in A entweder enthalten oder *nicht* enthalten.
- (n) ist in B entweder enthalten oder *nicht* enthalten.
- (n) ist in C entweder enthalten oder *nicht* enthalten.

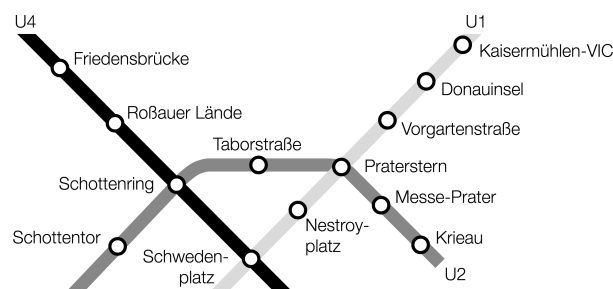
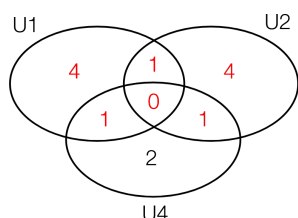
Rechts stellen wir in einem **Venn-Diagramm** für 3 Mengen jeden dieser $2^3 = 8$ Fälle grafisch dar.



Im Folgenden ist ein kleiner Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes abgebildet:

Die Mengen der Haltestellen der Linien U1, U2 und U4, die in diesem Ausschnitt dargestellt sind, werden mit U1, U2 bzw. U4 bezeichnet.

1) Tragen Sie in jeden Teilbereich des nachstehenden Diagramms die entsprechende Anzahl an Haltestellen für den abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes ein.



2) Geben Sie die Namen derjenigen Haltestellen an, die in der folgenden Menge liegen:

$$U1 \setminus (U2 \cup U4)$$

Kaisermühlen-VIC, Donauinsel, Vorgartenstraße, Nestroyplatz

Venn-Diagramm (Mengenoperationen)



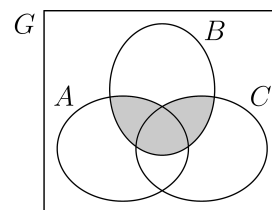
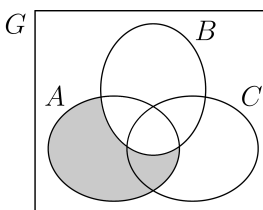
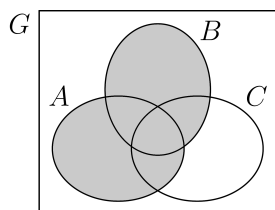
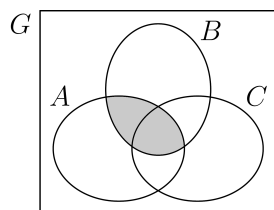
Markiere im Venn-Diagramm die angegebene Menge M .

a) $M = A \cap B$

b) $M = A \cup B$

c) $M = A \setminus B$

d) $M = (A \cup C) \cap B$



Venn-Diagramm (Anzahlen)



In einer Umfrage wurden 42 Personen nach ihren Hobbies befragt, wobei Mehrfachnennungen erlaubt waren.

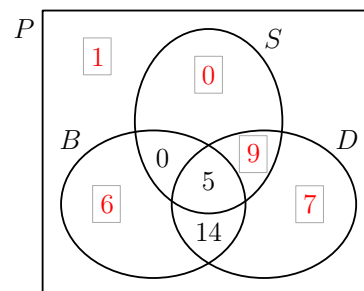
P ... Menge der Personen, die an der Umfrage teilgenommen haben

B ... Menge der Personen, die *Brettspiele* als Hobby nennen

S ... Menge der Personen, die *Sport* als Hobby nennen

D ... Menge der Personen, die *Digitale Medien* als Hobby nennen

5 der 42 Personen nannten alle drei Hobbies. Im Venn-Diagramm rechts ist diese Anzahl im entsprechenden Teilbereich eingetragen.



- 25 Personen nannten Brettspiele als Hobby.
- 35 Personen nannten Digitale Medien als Hobby.
- 28 Personen nannten mindestens zwei dieser drei Hobbies.
- Es gibt keine Person, die nur Sport als Hobby angegeben hat.

Trage im Venn-Diagramm rechts oben die entsprechenden Anzahlen in die Kästchen ein.

Russell-Paradoxon



Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entdeckte **Bertrand Russell** (1872–1970) das folgende **Paradoxon** in der von Cantor begründeten Mengenlehre:

Die Menge R besteht aus allen Mengen, die sich selbst *nicht* als Element enthalten ($\star$).

Zum Beispiel enthält die Menge R als Elemente die Mengen $\mathbb{N}$, $\{42\}$ und $\{\mathbb{N}, 42\}$.

Aber enthält die Menge R sich selbst als Element?

- Angenommen, die Menge R enthält sich selbst. Dann entsteht ein Widerspruch zu ($\star$), denn R enthält nur jene Mengen, die sich selbst *nicht* enthalten.
- Angenommen, die Menge R enthält sich selbst *nicht*. Dann müsste sie sich laut ($\star$) selbst enthalten. Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass R sich selbst *nicht* enthält.

In beiden möglichen Fällen erhält man also einen Widerspruch.

Oder: Ein Barbier rasiert genau jene Personen, die sich selbst *nicht* rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst? (**Russell, 1918**)

Daraufhin wurden mehrere Versuche unternommen, die allgemein gehaltene Mengen-Definition von Cantor so einzuschränken, dass keine Widersprüche auftreten können (**ZF(C)-Mengenlehre**, **NBG-Mengenlehre**). Dabei dürfen Mengen nur nach festgelegten Axiomen aufgebaut sein, die Konstruktionen – wie zum Beispiel R oben – nicht mehr zulassen.

Der österreichische Mathematiker **Kurt Gödel** (1906–1978) bewies jedoch im Jahr 1931 die beiden **Unvollständigkeitssätze**. Demnach kann jedes hinreichend starke, widerspruchsfreie formale System *nicht* seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen.

Bis heute konnte aber kein Widerspruch aus diesen **axiomatischen Mengenlehren** abgeleitet werden.

