

Georg Cantor (1895): „Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus: $M = \{m\}$ “

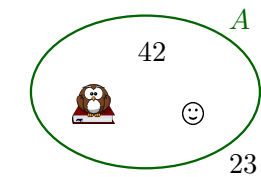
Die rechts dargestellte **Menge** A besteht aus den drei verschiedenen Elementen ☺, 42 und .

Wir schreiben dafür kurz: $A = \{\text{☺}, 42, \text{penguin}\}$

Die Zahl 42 ist ein Element der Menge A , kurz: $42 \in A$

Die Zahl 23 ist *kein* Element der Menge A , kurz: $23 \notin A$

Die Menge A besteht aus drei verschiedenen Elementen, kurz: $|A| = 3$



„Die Mächtigkeit von A ist 3.“

Eine Menge kann auch aus unendlich vielen Elementen bestehen, zum Beispiel die Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Eine Menge kann auch gar keine Elemente enthalten, nämlich die leere Menge, kurz: $\{\}$ oder $\emptyset$

Auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Menge kommt es *nicht* an.

Wesentlich ist für jedes Objekt nur, ob es ein Element der Menge ist oder nicht, zum Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

Im Gegensatz dazu kommt es bei **Folgen** auf die Reihenfolge an: $(1, 2, 3) \neq (3, 1, 2)$

Aufzählende Darstellung / Beschreibende Darstellung



Die Menge $A = \{\text{☺}, 42, \text{penguin}\}$ ist in **aufzählender Darstellung** gegeben. Alle 3 Elemente sind „aufgezählt“.

Die Menge $B = \{3, 5, 7, \dots\}$ besteht aus unendlich vielen Elementen, aber aus welchen?

Lukas meint: „Das ist die Menge der ungeraden Zahlen ab 3, also: $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots\}$ “

Finn meint: „Das ist die Menge der **Primzahlen** ab 3, also: $B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$ “

Mithilfe **beschreibender Darstellungen** können wir die Menge $\{3, 5, 7, \dots\}$ *eindeutig* festlegen:

Menge der ungeraden Zahlen ab 3

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade und } n \geq 3\}$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2 \cdot k + 3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Menge der Primzahlen ab 3

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{n \text{ ist Primzahl und } n \geq 3}_{\text{einschränkende Bedingung}}\}$$

Links vom senkrechten Strich | steht, welche Objekte überhaupt nur in der Menge enthalten sein können.

Nur, wenn ein Objekt auch die Bedingung *rechts* vom senkrechten Strich | erfüllt, ist es in der Menge enthalten.

Sprechweise: „Menge aller natürlichen Zahlen, für die gilt ...“

Beschreibende Darstellung



Kreuze genau jene Zahlen an, die in der Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 42\}$ enthalten sind.

☐ -5 ☐ 12 ☐ $\frac{23}{2}$ ☐ 42 ☐ 87 ☐ $\frac{80}{2}$

Teilmenge / Obermenge

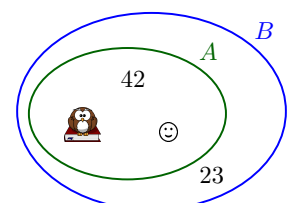


Im **Mengendiagramm** rechts unten ist jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B .

Genau dann ist A eine **Teilmenge** von B bzw. B eine **Obermenge** von A , und wir schreiben dafür kurz:

$$A \subseteq B \quad \text{bzw.} \quad B \supseteq A$$

Für ihre Mächtigkeiten gilt in diesem Fall $|A| \leq |B|$ bzw. $|B| \geq |A|$.





Jede natürliche Zahl ist auch eine **ganze Zahl**, also ein Element von $\mathbb{Z}$.

Jede ganze Zahl ist auch eine **rationale Zahl**, also ein Element von $\mathbb{Q}$.

Jede rationale Zahl ist auch eine **reelle Zahl**, also ein Element von $\mathbb{R}$.

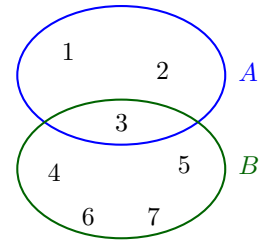
Trage jeweils das richtige Symbol $\subseteq$ bzw. $\supseteq$ in das Kästchen ein:

a) $\mathbb{N} \square \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N} \square \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Q} \square \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{Q} \square \mathbb{R}$ e) $\mathbb{Q} \square \mathbb{N}$ f) $\mathbb{R} \square \mathbb{Z}$



Im Mengendiagramm rechts unten sind zwei Mengen A und B dargestellt.

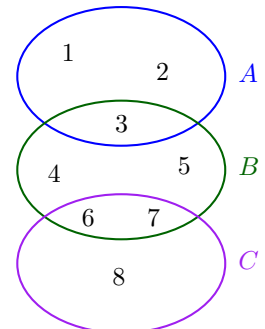
- Die **Durchschnittsmenge** $A \cap B$ besteht aus jenen Elementen, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
Im Beispiel rechts gilt also: $A \cap B = \{3\}$
- Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ besteht aus jenen Elementen, die in zumindest einer der beiden Mengen A oder B enthalten sind.
Im Beispiel rechts gilt also: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- Die **Differenzmenge** $A \setminus B$ besteht aus jenen Elementen, die in A enthalten sind, aber *nicht* in B .
Im Beispiel rechts gilt also: $A \setminus B = \{1, 2\}$



Im Mengendiagramm rechts unten sind drei Mengen A , B und C dargestellt.

Gib die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an.

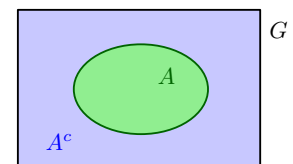
- a) $B \cap C = \square$ $A \cap C = \square$
- b) $B \cup C = \square$ $A \cup C = \square$
- c) $B \setminus C = \square$ $A \setminus C = \square$
- d) $A \cup (B \cap C) = \square$



Das **Komplement** von A bezüglich einer Grundmenge G ist $G \setminus A$.

Ist zum Beispiel $G = \mathbb{N}$ und A die Menge der geraden natürlichen Zahlen, dann ist das Komplement von A die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Ist G bekannt, dann kürzen wir das Komplement von A mit A^c bzw. A' ab.



Gib das Komplement von A bezüglich der angegebenen Grundmenge G in aufzählender Darstellung an.

- a) $G = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ $\Rightarrow$ $A^c = \square$
- b) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2\}$ $\Rightarrow$ $A^c = \square$
- c) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{\}$ $\Rightarrow$ $A^c = \square$
- d) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\Rightarrow$ $A^c = \square$



a) Kreuze genau jene Mengen an, die Teilmengen von $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind.

- ☐ $\{1, 3\}$ ☐ $\{2, 6\}$ ☐ $\{\}$ ☐ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ☐ $\{2, 3, 5\}$

b) Wie viele verschiedene Teilmengen hat $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ insgesamt?

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir die **Multiplikationsregel** aus der Kombinatorik:

Beim Zusammenstellen einer Teilmenge von A können wir für jedes ihrer 5 Elemente *unabhängig* voneinander entscheiden, ob es in der Teilmenge enthalten sein soll ($\in$) oder nicht ($\notin$).

Entscheiden wir uns zum Beispiel wie rechts dargestellt,

dann erhalten wir die Teilmenge .

	1	2	3	4	5
$\in$	☒	☐	☐	☒	☒
$\notin$	☐	☒	☒	☐	☐

Für die Anzahl verschiedener Teilmengen von A gilt also: · · · · =



Die **Potenzmenge** einer Menge A besteht aus allen Teilmengen von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ abgekürzt.

Zum Beispiel hat $A = \{1, 2, 3\}$ die folgende Potenzmenge, die aus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Elementen besteht:

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

Wenn A aus n Elementen besteht, dann besteht ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ aus 2^n Elementen.

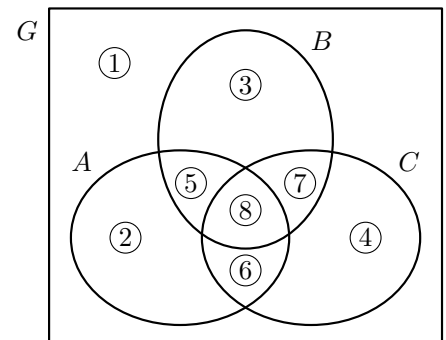


Die Mengen A , B und C sind Teilmengen einer Grundmenge G .

Für jedes Element (n) der Grundmenge G gilt:

- (n) ist in A entweder enthalten oder *nicht* enthalten.
- (n) ist in B entweder enthalten oder *nicht* enthalten.
- (n) ist in C entweder enthalten oder *nicht* enthalten.

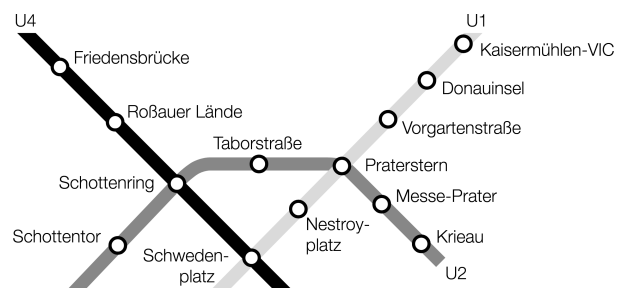
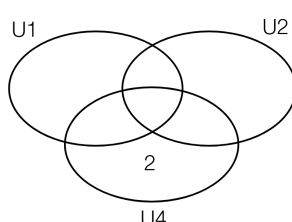
Rechts stellen wir in einem **Venn-Diagramm** für 3 Mengen jeden dieser $2^3 = 8$ Fälle grafisch dar.



Im Folgenden ist ein kleiner Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes abgebildet:

Die Mengen der Haltestellen der Linien U1, U2 und U4, die in diesem Ausschnitt dargestellt sind, werden mit U1, U2 bzw. U4 bezeichnet.

- 1) Tragen Sie in jeden Teilbereich des nachstehenden Diagramms die entsprechende Anzahl an Haltestellen für den abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes ein.



- 2) Geben Sie die Namen derjenigen Haltestellen an, die in der folgenden Menge liegen:

$$U1 \setminus (U2 \cup U4)$$

Venn-Diagramm (Mengenoperationen)



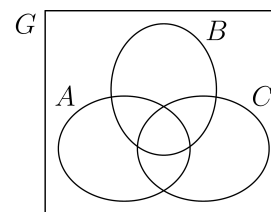
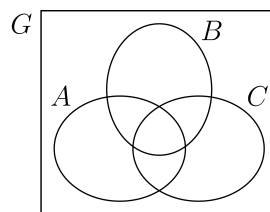
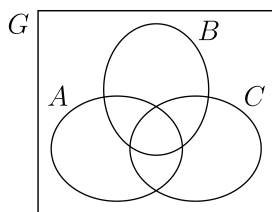
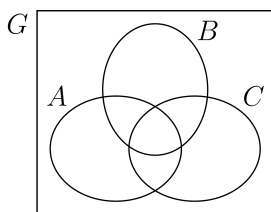
Markiere im Venn-Diagramm die angegebene Menge M .

a) $M = A \cap B$

b) $M = A \cup B$

c) $M = A \setminus B$

d) $M = (A \cup C) \cap B$



Venn-Diagramm (Anzahlen)



In einer Umfrage wurden 42 Personen nach ihren Hobbies befragt, wobei Mehrfachnennungen erlaubt waren.

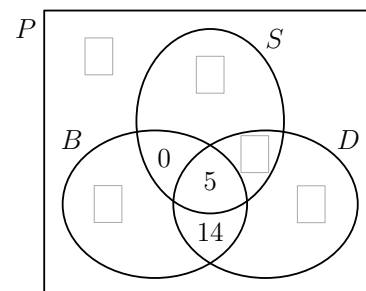
$P \dots$ Menge der Personen, die an der Umfrage teilgenommen haben

$B \dots$ Menge der Personen, die *Brettspiele* als Hobby nennen

$S \dots$ Menge der Personen, die *Sport* als Hobby nennen

$D \dots$ Menge der Personen, die *Digitale Medien* als Hobby nennen

5 der 42 Personen nannten alle drei Hobbies. Im Venn-Diagramm rechts ist diese Anzahl im entsprechenden Teilbereich eingetragen.



- 25 Personen nannten Brettspiele als Hobby.
- 35 Personen nannten Digitale Medien als Hobby.
- 28 Personen nannten mindestens zwei dieser drei Hobbies.
- Es gibt keine Person, die nur Sport als Hobby angegeben hat.

Trage im Venn-Diagramm rechts oben die entsprechenden Anzahlen in die Kästchen ein.

Russell-Paradoxon



Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entdeckte **Bertrand Russell** (1872–1970) das folgende **Paradoxon** in der von Cantor begründeten Mengenlehre:

Die Menge R besteht aus allen Mengen, die sich selbst *nicht* als Element enthalten ($\star$).

Zum Beispiel enthält die Menge R als Elemente die Mengen $\mathbb{N}$, $\{42\}$ und $\{\mathbb{N}, 42\}$.

Aber enthält die Menge R sich selbst als Element?

- Angenommen, die Menge R enthält sich selbst. Dann entsteht ein Widerspruch zu ($\star$), denn R enthält nur jene Mengen, die sich selbst *nicht* enthalten.
- Angenommen, die Menge R enthält sich selbst *nicht*. Dann müsste sie sich laut ($\star$) selbst enthalten. Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass R sich selbst *nicht* enthält.

In beiden möglichen Fällen erhält man also einen Widerspruch.

Oder: Ein Barbier rasiert genau jene Personen, die sich selbst *nicht* rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst? (**Russell, 1918**)

Daraufhin wurden mehrere Versuche unternommen, die allgemein gehaltene Mengen-Definition von Cantor so einzuschränken, dass keine Widersprüche auftreten können (**ZF(C)-Mengenlehre**, **NBG-Mengenlehre**). Dabei dürfen Mengen nur nach festgelegten Axiomen aufgebaut sein, die Konstruktionen – wie zum Beispiel R oben – nicht mehr zulassen.

Der österreichische Mathematiker **Kurt Gödel** (1906–1978) bewies jedoch im Jahr 1931 die beiden **Unvollständigkeitssätze**. Demnach kann jedes hinreichend starke, widerspruchsfreie formale System *nicht* seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen.

Bis heute konnte aber kein Widerspruch aus diesen **axiomatischen Mengenlehren** abgeleitet werden.

