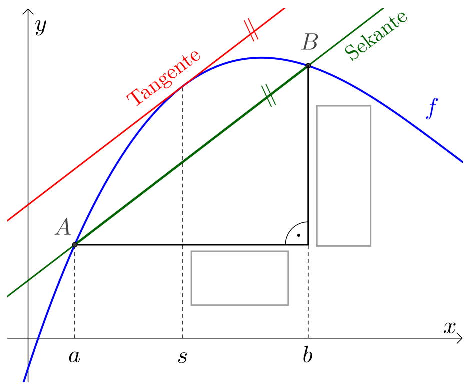
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wir sehen uns die Steigung einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a;b]$ an.

Stelle mithilfe von f, a und b eine Formel für die Steigung der Gerade durch die Punkte $A = (a \mid f(a))$ und $B = (b \mid f(b))$ auf:



$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall $[a;b]$ so, dass gilt:

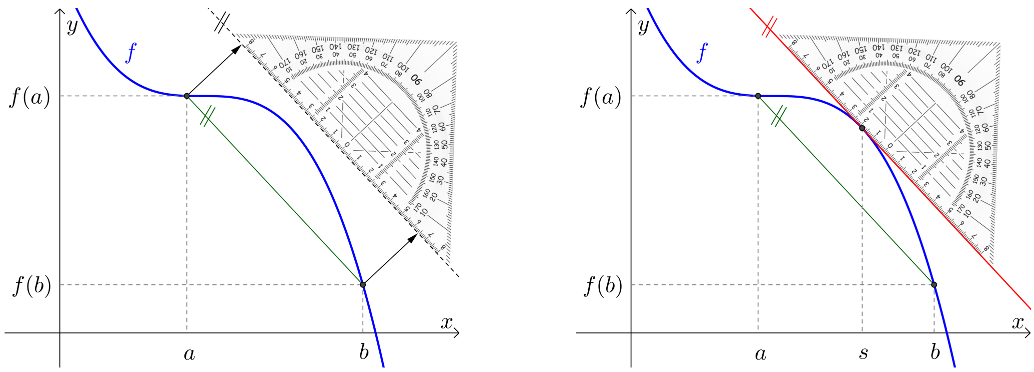
$$\boldsymbol{f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}.$$

Steigung einer ______ Steigung der ______

Die ______ Änderungsrate von f in $[a;b]$ ist also gleich groß wie

die ______ Änderungsrate von f an einer Stelle s in $[a;b]$.

Wir können eine solche Stelle s auch grafisch ermitteln, indem wir die Sekante parallel verschieben:

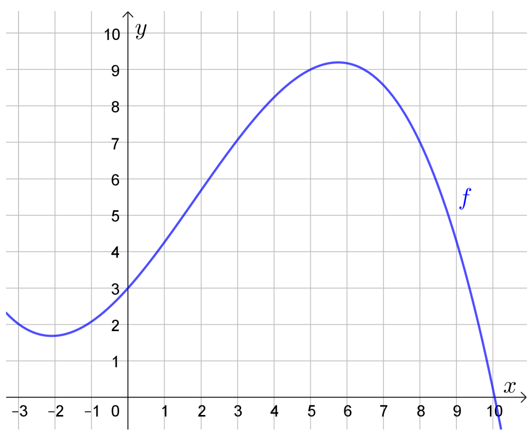


Kubische Funktion

Der Graph der kubischen Funktion f mit $f(x) = -\frac{7}{225} \cdot x^3 + \frac{77}{450} \cdot x^2 + \frac{101}{90} \cdot x + 3$ ist dargestellt.

1) Zeichne rechts die Sekante durch die Punkte $A = (0 \mid f(0))$ und $B = (8 \mid f(8))$ ein.

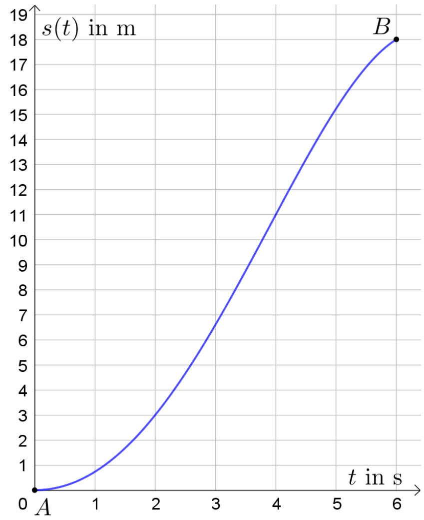
2) Berechne jene Stelle s im Intervall $[0;8]$, an der die Tangente die gleiche Steigung wie die Sekante hat. Zeichne rechts diese Tangente ein.



Geschwindigkeiten

Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion s ist im Zeitintervall $[0; 6]$ dargestellt.

Zeichne rechts die Sekante durch die Punkte A und B ein.
Ermittle ihre Steigung und interpretiere den Wert der Steigung.



Der Mittelwertsatz garantiert mindestens einen Zeitpunkt,

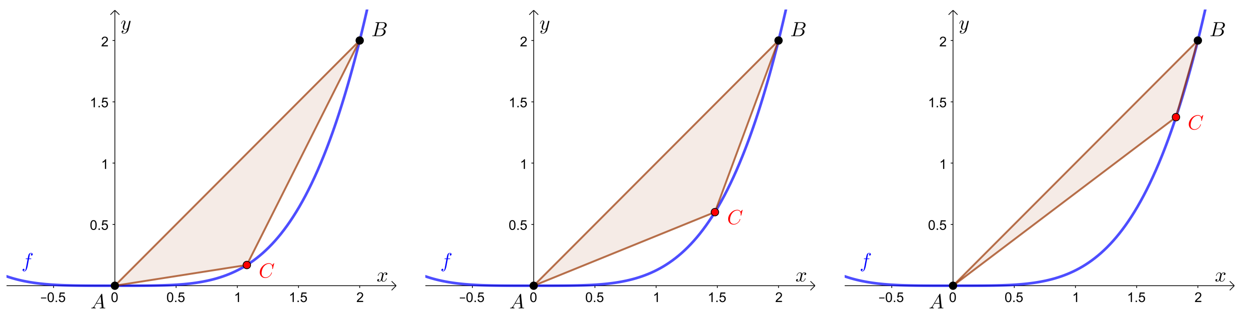
an dem die ______________________________ gleich groß ist

wie die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; 6]$.

Zu welchem Zeitpunkt passiert das rechts oben zum ersten Mal? Zeichne eine zugehörige Tangente ein.

Optimierungsaufgabe

Am Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^4$ fixieren wir die Punkte $A = (0 \mid \boxed{})$ und $B = (2 \mid \boxed{})$.
Der Punkt C ist am Graphen dazwischen beweglich. Wir zeichnen das Dreieck ABC ein:



Der Flächeninhalt des Dreiecks soll so groß wie möglich werden.

1) Berechne die Länge c der Seite AB.

2) Der Flächeninhalt $\dfrac{c \cdot h}{2}$ soll so groß wie möglich werden.

Ermittle rechts grafisch jenen Punkt C, für den die Höhe h so groß wie möglich ist. Zeichne das optimale Dreieck ein.

3) Berechne die Koordinaten von C.