☆ ARBEITSBLATT – NATÜRLICHER LOGARITHMUS

Wir haben von der natürlichen Logarithmusfunktion

$$\ln\colon\ ]0;\infty[\ \to \mathbb{R}$$

noch nie etwas gehört. Ebenso ist uns die Eulersche Zahl e unbekannt.

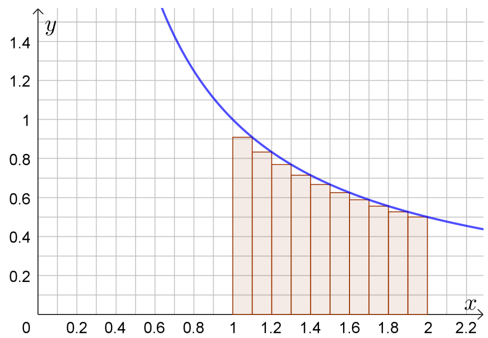
Dafür wissen wir über das bestimmte Integral gut Bescheid und kennen den Zwischenwertsatz.

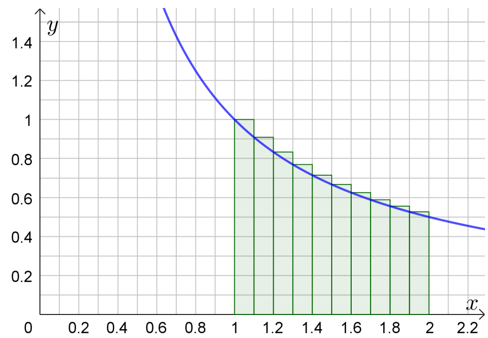
1. Ein bestimmtes Integral

1.1. Um den Wert des Integrals

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

näherungsweise zu berechnen, zerlegen wir $[1;2]$ in n gleich breite Intervalle und berechnen die zugehörigen Riemannschen Unter- und Obersummen. Erkläre mithilfe der Skizze, weshalb sich Unter- und Obersumme um weniger als $1/2 \cdot 1/n$ unterscheiden:





Verwende diese Abschätzung, um den Wert des Integrals mit einem simplen Taschenrechner bis auf einen Fehler von $5 \cdot 10^{-2}$ zu berechnen.

1.2. Erkläre mit Unter- und Obersummen, dass gilt:

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_2^4 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \int_1^2 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

Tipp: Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn eine Seite verdoppelt und die andere halbiert wird?

1.3. Seien $a, b \in\ ]0;\infty[$ mit $a < b$ und $\lambda \in\ ]0;\infty[$. Erkläre mit Unter- und Obersummen, dass gilt:

$$\int_a^b \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_{\lambda\cdot a}^{\lambda\cdot b} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

Datum: 7. Juni 2019.

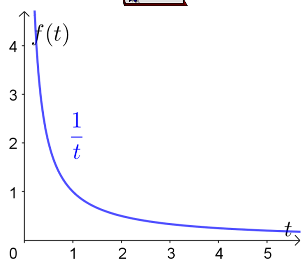
2. Der Natürliche Logarithmus

Der Natürliche Logarithmus als Stammfunktion

Wir *definieren* die Funktion $\ell\colon\ ]0;\infty[\ \to \mathbb{R}$ durch

$$\ell(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Veranschauliche im Bild rechts den Wert $\ell(3)$ als Flächeninhalt.



Erinnere dabei, dass allgemein $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t$ gilt.

Die folgenden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition. Siehst du das?

1) $\ell(1) = 0$

2) $\ell(x) < \ell(y)$ wenn $x < y$

3) $\ell(x) > 0$ wenn $x > 1$

4) $\ell(x) < 0$ wenn $0 < x < 1$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sehen wir, dass ℓ an jeder Stelle stetig und sogar differenzierbar ist mit Ableitung

$$\ell'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Durch Zerlegen des Integrationsbereichs erhält man

$$\int_1^{x\cdot y} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t + \int_x^{x\cdot y} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Aus Aufgabe 1.3 folgt, dass

$$\int_x^{x\cdot y} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^y \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Daraus erhalten wir nun das folgende wichtige Ergebnis:

Funktionalgleichung des Natürlichen Logarithmus

Für alle $x, y \in\ ]0;\infty[$ gilt:

$$\ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y)$$

2.1. Sei $x \in\ ]0;\infty[$ und $n \in \mathbb{Z}$. Zeige: **a)** $\ell(1/x) = -\ell(x)$ **b)** $\ell(x^n) = n \cdot \ell(x)$

2.2. Zeige: **a)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ell(x) = \infty$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ell(x) = -\infty$

Tipp: Zeige zuerst, dass $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ell(2^n) = \infty$.

2.3. Zeige, dass es genau eine Zahl $e \in\ ]0;\infty[$ gibt, sodass $\ell(e) = 1$.

Tipp: Zwischenwertsatz

Die sogenannte **Eulersche Zahl e** ist also durch die Bedingung

$$\int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1$$

eindeutig bestimmt ist.

2.4. Zeige mit Unter- und Obersummen, dass $\ell(2) < 1 < \ell(3)$. Folgere, dass $2 < e < 3$.

Wir legen nun einen alternativen Zugang zur Eulerschen Zahl. Sei dazu für jede ganze Zahl $n \geq 1$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

In den nächsten Aufgaben zeigen wir, dass die Folge $\langle e_n \rangle$ konvergiert und

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n.$$

2.5. Zeige mithilfe von Unter- und Obersummen, dass immer

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq \int_1^{1+1/n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}.$$

2.6. Zeige, dass immer

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq \ell(e_n) \leq 1.$$

Tipp: $\ell(e_n) = n \cdot \ell(1 + 1/n)$

2.7. Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \ell(e_n) = 1.$$

Tipp: Sandwich zwischen $1 - \frac{1}{n+1}$ und 1

2.8. Zeige, dass immer

$$e_n \leq 3.$$

2.9. Sei $K > 1$. Zeige mithilfe von Unter- und Obersummen, dass für alle $x, y \in [K^{-1}; K]$ gilt:

$$K^{-1} \cdot |x - y| \leq |\ell(x) - \ell(y)| \leq K \cdot |x - y|$$

2.10. Zeige, dass die Folge $\langle e_n \rangle$ konvergiert, und dass

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

Tipp: Zeige, dass immer $|e_n - e| \leq 3 \cdot |\ell(e_n) - \ell(e)|$.

2.11. ☆ Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $\langle (1 + \frac{x}{n})^n \rangle$ konvergent ist und

$$\ell\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = x.$$

Die Funktion $\ell\colon\ ]0;\infty[\ \to \mathbb{R}$ wird üblicherweise **natürliche Logarithmusfunktion** genannt und mit **ln** abgekürzt.