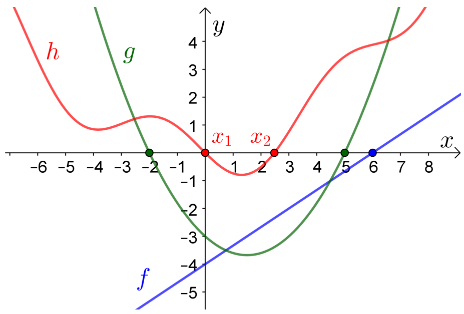
Wozu Näherungsverfahren?

Die Nullstellen von linearen Funktionen und quadratischen Funktionen können wir *exakt* berechnen.

Die Funktion h mit $h(x) = 0{,}1 \cdot x^2 - \sin(x)$ hat 2 Nullstellen.
Die zugehörige Gleichung

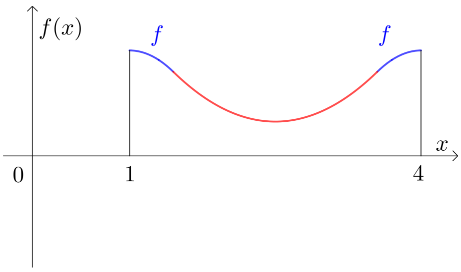
$$0 = 0{,}1 \cdot x^2 - \sin(x)$$

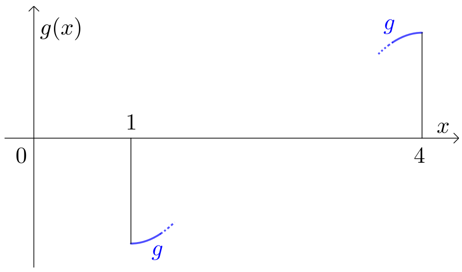
hat die Lösung $x_1 = 0$ und eine zweite Lösung x_2.
Wir können diese Gleichung aber *nicht* nach x umformen.



Zwischenwertsatz

Die Funktionen f und g sind im Intervall $[1;4]$ definiert und haben dort *keine* Nullstelle.
Versuche links und rechts die Funktionsgraphen so zu vervollständigen, dass du *nie* den Stift absetzt.

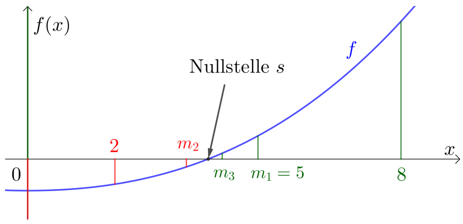




Dass das rechts nichts werden kann, sagt der Zwischenwertsatz aus:
Die stetige Funktion g nimmt auf $[1;4]$ jeden Wert in $[g(1);g(4)]$ an.

Bisektionsverfahren

Für die stetige Funktion f gilt $f(2) < 0$ und $f(8) > 0$.
Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass f im Intervall $[2;8]$ eine Nullstelle s haben muss.
Das **Bisektionsverfahren** grenzt das Intervall, in dem f eine Nullstelle haben muss, schrittweise ein.



Dazu berechnen wir in jedem Durchlauf die Mitte m_i vom Intervall als Näherungswert für die Nullstelle.
Je nach Vorzeichen von $f(m_i)$ suchen wir in der linken Hälfte oder in der rechten Hälfte weiter:

1) Der erste Näherungswert m_1 ist die Mitte vom Intervall $[2;8]$, also $m_1 = 5$.
Aus $f(m_1) > 0$ folgt, dass f im halb so breiten Intervall $[2;5]$ eine Nullstelle haben muss.

2) Der zweite Näherungswert m_2 ist die Mitte vom Intervall $[2;5]$, also $m_2 = 3{,}5$.
Aus $f(m_2) < 0$ folgt, dass f im halb so breiten Intervall $[3{,}5;5]$ eine Nullstelle haben muss.

3) Der dritte Näherungswert m_3 ist die Mitte vom Intervall $[3{,}5;5]$, also $m_3 = 4{,}25$.
Aus $f(m_3) > 0$ folgt, dass f im halb so breiten Intervall $[3{,}5;4{,}25]$ eine Nullstelle haben muss.

Ab welchem Durchlauf ist der Näherungswert *sicher* weniger als $\varepsilon = 0{,}0001$ von der Nullstelle entfernt?

Intervallbreite nach n Durchläufen: $\dfrac{6}{2^n}$

$$\frac{6}{2^n} < 0{,}0001 \iff 2^n > 60\,000 \iff n > \log_2(60\,000) \iff n > 15{,}8...$$

Nach 16 Durchläufen ist das Intervall, das eine Nullstelle enthält, weniger als 0,0001 breit.
Der Näherungswert m_{17} ist also sicher weniger als 0,0001 von der Nullstelle entfernt.

Der Grenzwert der Folge $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ ist die Nullstelle.

Newtonsches Näherungsverfahren

Beim Annähern von Nullstellen ist das **Newtonsche Näherungsverfahren** häufig effizienter als das Bisektionsverfahren. Das Newtonsche Näherungsverfahren läuft folgendermaßen ab:

1) Wähle einen Startwert x_1.

2) Berechne: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ Der Näherungswert x_2 ist die Nullstelle der Tangente t_1 im Punkt $P_1 = (x_1 \mid f(x_1))$. Mehr dazu erfährst du auf der letzten Seite vom Arbeitsblatt.

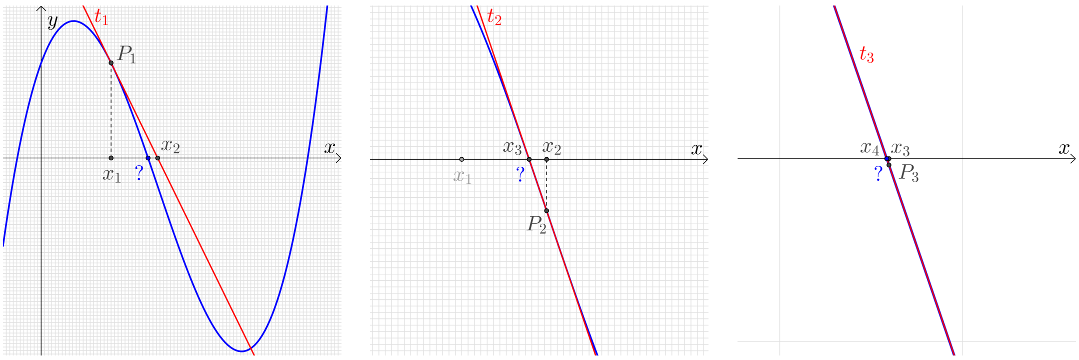
3) Berechne: $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ Der Näherungswert x_3 ist die Nullstelle der Tangente t_2 im Punkt $P_2 = (x_2 \mid f(x_2))$.

4) Berechne: $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$ Der Näherungswert x_4 ist die Nullstelle der Tangente t_3 im Punkt $P_3 = (x_3 \mid f(x_3))$.

Die Näherungswerte bilden also eine Folge $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ mit folgender rekursiver Darstellung:

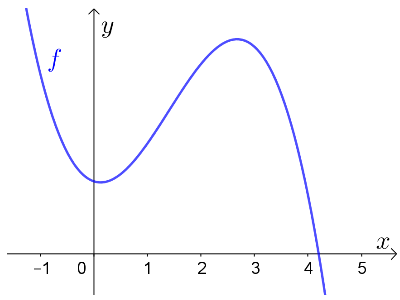
$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Wenn alles gut geht, landest du nach wenigen Schritten nahe bei einer Nullstelle.
Ob und bei welcher Nullstelle du landest, hängt vom gewählten Startwert ab. Probiere es aus:



Newtonsches Näherungsverfahren

Die kubische Funktion f mit $f(x) = -5 \cdot x^3 + 21 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 21$ hat genau eine reelle Nullstelle.
Wir wählen $x_1 = 4$ als Startwert für das Newtonsche Näherungsverfahren.



Ermittle eine Funktionsgleichung von f'.

$$f'(x) = -15 \cdot x^2 + 42 \cdot x - 5$$

Ermittle die rekursive Darstellung für die Näherungswerte.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-5 \cdot x_n^3 + 21 \cdot x_n^2 - 5 \cdot x_n + 21}{-15 \cdot x_n^2 + 42 \cdot x_n - 5}$$

Berechne die Näherungswerte mit einer Tabellenkalkulation oder mit deinem Taschenrechner.
Viele Taschenrechner haben eine Variable, die automatisch das letzte Ergebnis speichert (z.B. „ANS“).
Wenn du mit dieser Variable die rechte Seite der Rekursion eingibst, bekommst du auf Knopfdruck sofort x_2, x_3, x_4 usw.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
4	4,2207...	4,2001...	4,200...	4,2	4,2	4,2

Berechne zur Probe: $f(x_7) = 0$

Verschiedene Startwerte

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{17} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$ hat 3 verschiedene reelle Nullstellen.

Es hängt vom Startwert ab, ob und welche Nullstelle das Newtonsche Näherungsverfahren findet:

$$f'(x) = \frac{12}{17} \cdot x^2 - 0{,}14 \cdot x - 3$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{4}{17} \cdot x_n^3 - 0{,}07 \cdot x_n^2 - 3 \cdot x_n + 1}{\frac{12}{17} \cdot x_n^2 - 0{,}14 \cdot x_n - 3}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,246...	0,333...	0,333...	0,333...	0,333...	0,333...

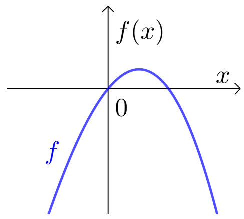
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
5	4,020...	3,625...	3,553...	3,550...	3,550...	3,550...

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
−5	−4,012...	−3,643...	−3,588...	−3,587...	−3,587...	−3,587...

Gleichungen näherungsweise lösen

Die folgende Gleichung können wir *nicht* nach x umformen:

$$\sin(x) = x^2$$



Die Lösungen der Gleichung sind die Nullstellen der dargestellten Funktion f.

Für die Funktion f gilt: $f(x) = \sin(x) - x^2$

$$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n) - x_n^2}{\cos(x_n) - 2 \cdot x_n}$$

Beachte, dass $\sin' = \cos$ nur im Bogenmaß stimmt. Stelle deinen Taschenrechner also auf das Bogenmaß um.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,891...	0,876...	0,876...	0,876...	0,876...	0,876...

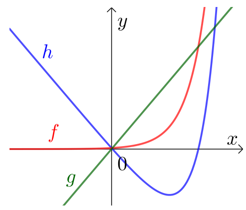
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	0	0	0

Schnittstellen näherungsweise berechnen

Wir ermitteln die beiden Schnittstellen der folgenden Funktionen näherungsweise:

$$f(x) = e^{2\cdot x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = 42 \cdot x$$

Diese Schnittstellen sind die Nullstellen der dargestellten Funktion h mit $h(x) = e^{2\cdot x} - 42 \cdot x$.



$$h'(x) = e^{2\cdot x} \cdot 2 - 42$$

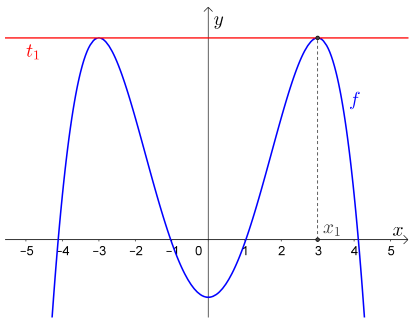
$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{2\cdot x_n} - 42 \cdot x_n}{e^{2\cdot x_n} \cdot 2 - 42}$$

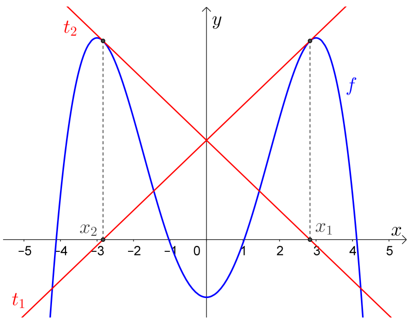
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	−0,271...	0,021...	0,025...	0,025...	0,025...	0,025...

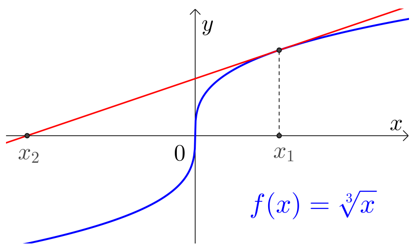
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
5	4,504...	4,014...	3,538...	3,093...	2,710...	2,436...

Newton fails.

Erkläre, warum das Newtonsche Näherungsverfahren bei den drei dargestellten Beispielen scheitert:







Rechne nach, dass für $f(x) = \sqrt[3]{x}$ beim Newtonschen Näherungsverfahren gilt: $x_{n+1} = -2 \cdot x_n$

Links: Die Tangente t_1 ist parallel zur x-Achse und hat keine Nullstelle.
Wegen $f'(x_1) = 0$ kommt es zu einer Division durch 0.

Mitte: Die Näherungswerte bleiben in einem Zyklus ($x_1 = x_3 = x_5 = \cdots$ bzw. $x_2 = x_4 = x_6 = \cdots$), der sich keiner Nullstelle annähert.

Rechts: Unabhängig vom Startwert $x_1 \neq 0$ entfernen sich die Näherungswerte immer weiter von der Nullstelle 0. Es gilt:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \implies f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \sqrt[3]{x_n} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{x_n^2} = x_n - 3 \cdot \sqrt[3]{x_n^3} = x_n - 3 \cdot x_n = -2 \cdot x_n$$

$$\implies x_{n+1} = -2 \cdot x_n$$

Wurzeln annähern

Die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2$ hat die positive Nullstelle $\sqrt{2}$.
Nähere den Wert mit dem Newtonschen Näherungsverfahren an.

$$f'(x) = 2 \cdot x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2 \cdot x_n}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1,5	1,416 666...	1,414 215...	1,414 213...	1,414 213...	1,414 213...

Linearisierung & Nullstelle der Tangente

Für die Funktion f gilt: $f(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 2$

1) Linearisiere die Funktion an der Stelle 1, das heißt:
Ermittle eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (1 \mid f(1))$.

2) Berechne die Nullstelle der Tangente.

1) $f(1) = 2 \implies$ Punkt $(1 \mid 2)$ liegt auf Tangente.

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 4 \implies f'(1) = -3 \implies$ Tangente hat die Steigung -3.

$\implies$ Gleichung der Tangente: $y = -3 \cdot (x - 1) + 2$ bzw. $y = -3 \cdot x + 5$

2) $y = 0 \implies 0 = -3 \cdot x + 5 \implies x = \frac{5}{3}$

Rekursion (Beweis)

Die Funktion f hat an der Stelle a keine waagrechte Tangente. Es gilt also: $f'(a) \neq 0$

Zeige, dass die Tangente im Punkt $(a \mid f(a))$ tatsächlich die Nullstelle $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ hat.

Die Tangente hat die Steigung $f'(a)$ und der Punkt $(a \mid f(a))$ liegt auf der Tangente.

$\implies$ Gleichung der Tangente: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

Nullstelle der Tangente:

$$0 = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \iff \quad -\frac{f(a)}{f'(a)} = x - a \quad \iff \quad x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$