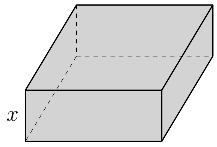
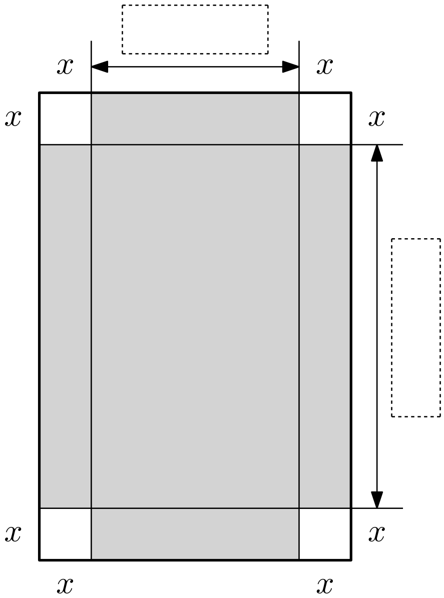
Volumen einer Schachtel maximieren

Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen $a = 21$ cm und $b = 30$ cm wollen wir eine (oben offene) Schachtel mit möglichst großem Volumen falten.
Dazu schneiden wir von den 4 Ecken jeweils ein Quadrat mit x cm Seitenlänge ab.





1) Trage mithilfe von x die Längen im Bild links ein.

2) Für welche Werte von x können wir eine Schachtel falten?

$\boxed{} < x < \boxed{}$

3) Das Volumen V der Schachtel hängt von x ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion V auf.

$V(x) = \boxed{}$

$V(x)\ldots$ Volumen der Schachtel in cm^3

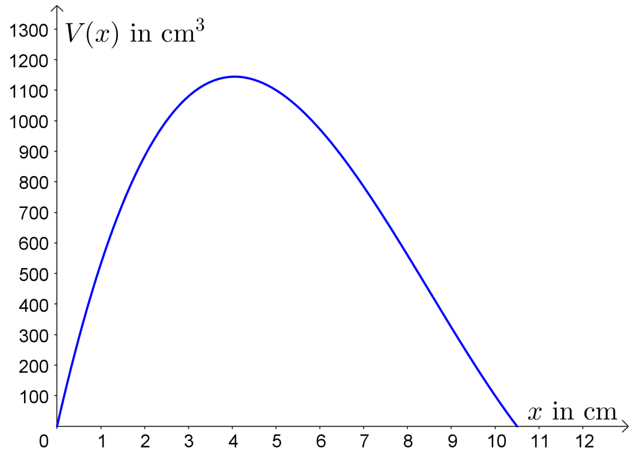
Rechts ist der Graph der Funktion V dargestellt.

Wir möchten x so wählen, dass das Volumen so groß wie möglich ist.

4) Zeichne den Hochpunkt von V rechts ein.
Verschiebe dazu ein Geodreieck parallel zur x-Achse.

Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$x_{\max} \approx \boxed{}$ $V_{\max} \approx \boxed{}$



5) Versuche mit dem Taschenrechner $V_{\max}$ möglichst genau zu bestimmen.
Trage deine berechneten Wertepaare in die Tabelle ein.

x						
$V(x)$						

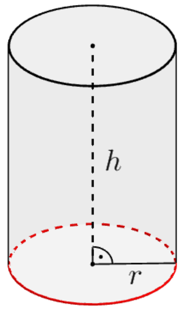
$x_{\max} \approx \boxed{}$ $V_{\max} \approx \boxed{}$

Die *exakten* Werte sind übrigens $x_{\max} = \dfrac{17 - \sqrt{79}}{2}$ und $V_{\max} = \sqrt{79^3} + 442$.

Diese *exakten* Werte können wir mithilfe der Differentialrechnung berechnen.

Oberfläche eines Drehzylinders minimieren

Rechts ist ein Drehzylinder mit dem Radius r und der Höhe h dargestellt.



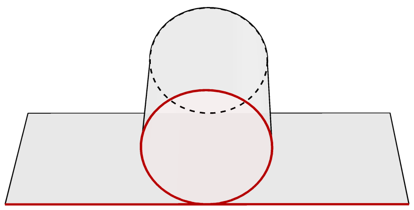
1) Stelle mithilfe von r und h eine Formel für sein Volumen V auf.

$V =$

Es gibt Drehzylinder mit *verschiedenen* Proportionen, aber *gleichem* Volumen.

2) Wenn der Radius verdoppelt wird, aber das Volumen gleich bleiben soll, dann muss die Höhe auf $\frac{\square}{\square}$ von h verkleinert werden.

Wir wollen eine Konservendose in der Form eines Drehzylinders mit Volumen $V = 500\,\text{cm}^3$ herstellen. Die Oberfläche (Materialkosten) soll dabei so klein wie möglich sein.



3) Stelle jeweils mithilfe von r und h einen richtigen Term auf:
Der abgerollte Mantel ist ein Rechteck mit den Seitenlängen ______ und ______.
Für die Oberfläche O des Drehzylinders gilt also:

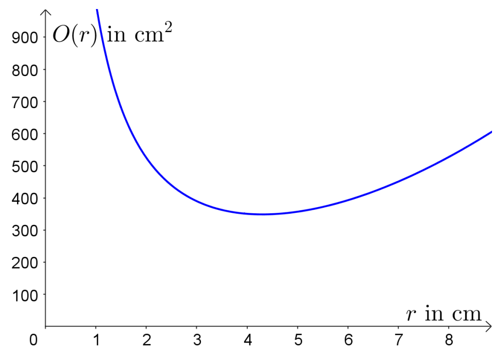
$O =$

4) Das Volumen $V = 500\,\text{cm}^3$ ist konstant.
Stelle mithilfe von $r > 0$ eine Formel für h auf.

$h =$

5) Die Oberfläche O des Drehzylinders hängt von r ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion O auf.

$O(r) =$



Rechts oben siehst du den Graphen der Funktion O. Was passiert mit $O(r)$, wenn r sehr groß oder nahe bei 0 ist?

6) Zeichne den Tiefpunkt von O am Funktionsgraphen rechts oben ein.
Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$r_{\text{min}} \approx$ $\qquad$ $O_{\text{min}} \approx$

Die *exakten* Werte sind übrigens $r_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ und $O_{\text{min}} = 150 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \pi}$.

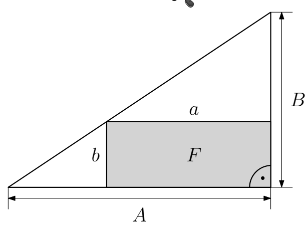
7) Berechne die zugehörige Höhe h_{min}. Zeige dann, dass $h_{\text{min}} = 2 \cdot r_{\text{min}}$ gilt.
Allgemein ist beim optimalen Drehzylinder die Höhe gleich groß wie sein Durchmesser.

Rechtecksfläche in rechtwinkeligem Dreieck maximieren

Wir wollen dem rechts dargestellten rechtwinkeligen Dreieck mit den Kathethenlängen $A = 10\,\text{cm}$ und $B = 4\,\text{cm}$ ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einschreiben.

Die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Katheten des Dreiecks.

Die linke obere Ecke des Rechtecks sucht also auf der Hypotenuse ihren „Lieblingsplatz“.

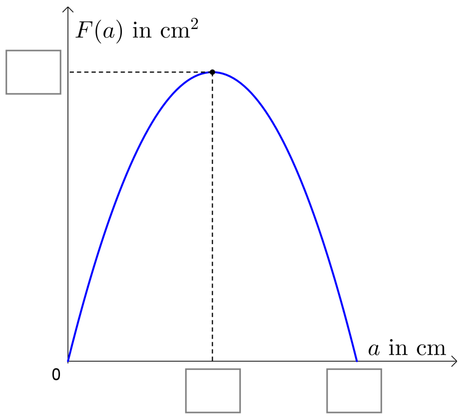


1) Stelle mithilfe der Seitenlängen a und b des Rechtecks eine Formel für seinen Flächeninhalt F auf.

$F =$ ☐

2) Begründe, warum $\dfrac{A}{A-a} = \dfrac{B}{b}$ gilt. Forme nach b um.

Hinweis: Strahlensatz



3) Der Flächeninhalt F des Rechtecks hängt von a ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion F auf.

$F(a) =$ ☐

4) F ist eine ☐ Funktion mit den Nullstellen $a_1 =$ ☐ und $a_2 =$ ☐.
Rechts oben ist der Graph von F dargestellt. Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

Minimaler Abstand: Funktionsgraph – Punkt

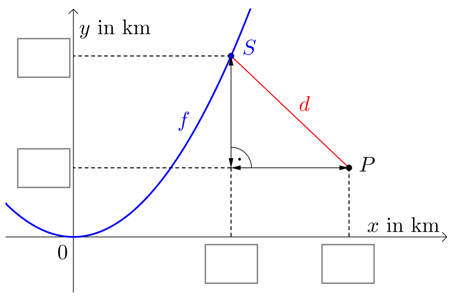
Ein Raumschiff fliegt entlang des Funktionsgraphen von f mit $f(x) = \frac{x^2}{2}$. (Koordinaten in km)

In welchem Punkt seiner Flugbahn ist es dem Planeten im Punkt $P = (4 \mid 1)$ am nächsten?

Am rechts unten dargestellten Funktionsgraphen ist ein beliebiger Punkt $S = (a \mid b)$ eingezeichnet.

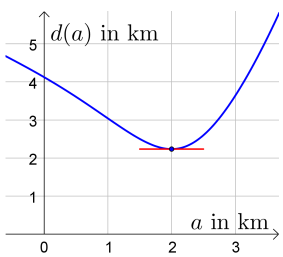
1) Stelle mithilfe von a und b eine Formel für den Abstand d zwischen den Punkten S und P auf.

$d =$ ☐



2) Für jeden Punkt $S = (a \mid b)$ auf der Flugbahn gilt:

$b = f(a) =$ ☐



3) Der Abstand d zwischen $S = (a \mid f(a))$ und $P = (4 \mid 1)$ hängt von a ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion d auf.

$d(a) =$ ☐

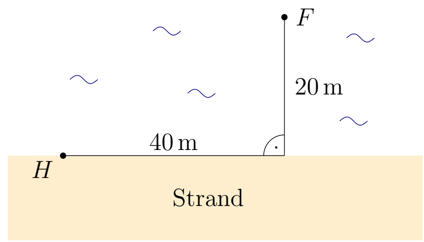
4) Lies den optimalen Wert a_{min} links ab. In welchem Punkt ist das Raumschiff dem Planeten also am nächsten? Wie groß ist dieser Abstand?

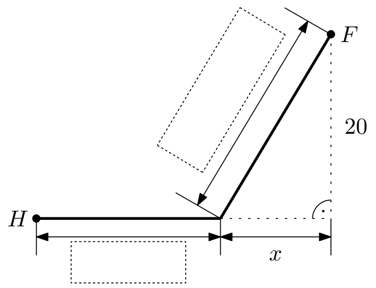
Minimaler Zeitaufwand: Hund → Frisbee

Der Hund „Elvis“ steht am Ufer und möchte auf schnellstem Weg ein Frisbee im Wasser erreichen.
An Land läuft Elvis mit der konstanten Geschwindigkeit $v_L = 3\,\mathrm{m/s}$.
Im Wasser schwimmt Elvis mit der konstanten Geschwindigkeit $v_W = 1\,\mathrm{m/s}$.

1) Wie lang braucht Elvis auf direktem Weg durch das Wasser?

2) Wie lang braucht Elvis, wenn er so kurz wie möglich zum Frisbee schwimmt?





Ein Mathematiker hat festgestellt, dass sein Hund Elvis intuitiv einen besseren Weg wählt. Ein solcher Weg ist links dargestellt.

3) Trage mithilfe von x die Längen im Bild links ein.

Die Randwerte $x = 40$ und $x = 0$ haben wir in **1)** und **2)** behandelt. Der optimale Wert für x liegt dazwischen.

4) Wie lang läuft Elvis am Strand? Stelle mithilfe von x eine Formel für diese Zeit t_L auf.

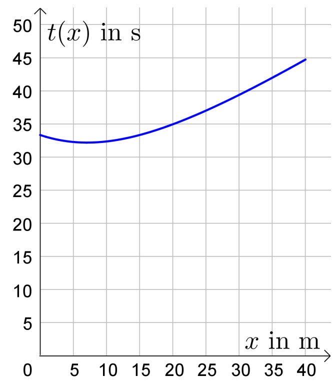
$t_L =$ $\boxed{}$

Wie lang schwimmt Elvis im Wasser? Stelle mithilfe von x eine Formel für diese Zeit t_W auf.

$t_W =$ $\boxed{}$

5) Die von Elvis insgesamt benötigte Zeit t hängt von x ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion t auf.

$t(x) =$ $\boxed{}$



Im Bild rechts siehst du den Graphen der Funktion t.
Findest du deine Ergebnisse aus **1)** und **2)** wieder?

Elvis möchte x so wählen, dass die Gesamtzeit so klein wie möglich ist.
Der optimale Wert für x ist $x_{\min} = \sqrt{50} = 7{,}07\ldots\,\mathrm{m}$.

6) Um wie viel Prozent weniger Zeit benötigt Elvis auf dem optimalen Weg als auf direktem Weg?