

Die Gerade g verläuft durch den Punkt A ,
und \vec{v} ist ein Richtungsvektor der Gerade.
Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt

$$X = A + t \cdot \vec{v}$$

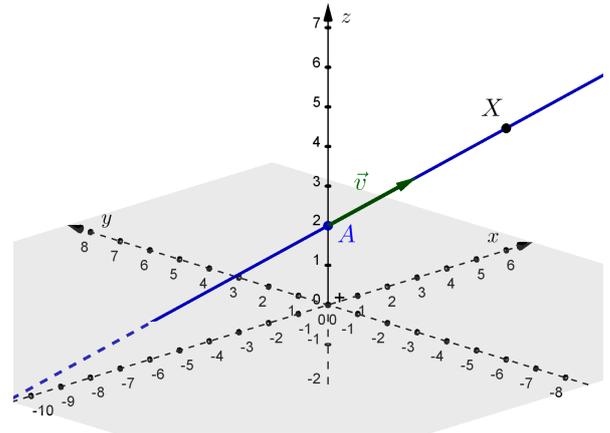
auf der Gerade.

Die Zahl t nennen wir **Parameter** und

$$g: X = A + t \cdot \vec{v}$$

eine **Parameterdarstellung** der Gerade g .

Jeder Punkt X auf der Gerade *entspricht genau einem* Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$.



Gerade durch zwei Punkte 

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade durch die Punkte $A = (3 \mid -2 \mid 4)$ und $B = (5 \mid 1 \mid 0)$.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-(-2) \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt auf Gerade? 

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Gerade $h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Liegt der Punkt $P = (4 \mid -7 \mid 1)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I: } 4 &= 2 + t \cdot (-1) && \iff t = -2 \\ \text{II: } -7 &= -1 + t \cdot 3 && \iff t = -2 \\ \text{III: } 1 &= 3 + t \cdot 1 && \iff t = -2 \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt also auf der Gerade h .
Der Parameterwert $t = -2$ liefert diesen Punkt P .

Liegt der Punkt $Q = (-1 \mid 8 \mid 5)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I: } -1 &= 2 + t \cdot (-1) && \iff t = 3 \\ \text{II: } 8 &= -1 + t \cdot 3 && \iff t = 3 \\ \text{III: } 5 &= 3 + t \cdot 1 && \iff t = 2 \end{aligned}$$

Der Punkt Q liegt also *nicht* auf der Gerade h .
Es gibt keine Zahl $t \in \mathbb{R}$, die *alle drei* Gleichungen erfüllt.

Punkt auf Gerade 

Berechne a und b so, dass die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ den Punkt $P = (4 \mid 2 \mid 0)$ enthält.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I: } 4 &= 1 + t \cdot b && \iff b = \frac{3}{t} \xrightarrow{\text{II}} b = -2 \\ \text{II: } 2 &= 5 + t \cdot 2 && \iff t = -\frac{3}{2} \\ \text{III: } 0 &= a + t \cdot (-4) && \iff a = 4 \cdot t \xrightarrow{\text{II}} a = -6 \end{aligned}$$



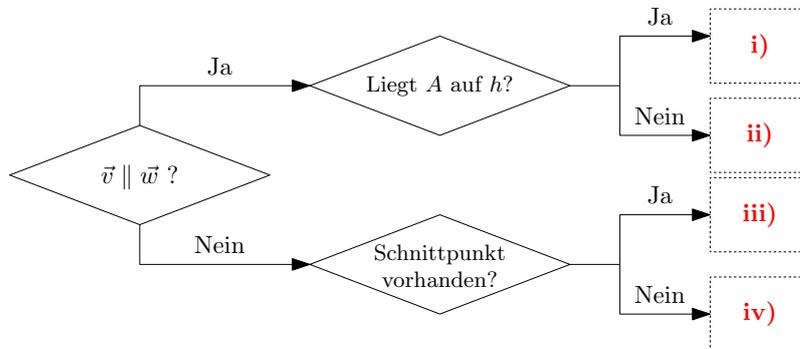
Zwei Geraden im Raum haben genau eine der vier folgenden Lagebeziehungen:

i) ident **ii)** parallel (aber nicht ident) **iii)** schneidend (aber nicht ident) **iv)** windschief

Erkläre, wie du die Lagebeziehung zweier Geraden g und h aus den Parameterdarstellungen

$$g: X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad h: X = B + u \cdot \vec{w}$$

ermitteln kannst. Trage dazu die 4 Lagebeziehungen **i)**, **ii)**, **iii)** bzw. **iv)** richtig in die Kästchen ein:



i) oder ii) ?

Welche Lage haben die Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ zueinander?

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -1,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \implies g \text{ und } h \text{ sind ident oder echt parallel.}$$

Liegt der Punkt $(4 | 2 | -2)$ auf h ?

$$\begin{aligned} \text{I: } 4 &= 3 + u \cdot (-3) && \iff u = -\frac{1}{3} \\ \text{II: } 2 &= u \cdot (-6) && \iff u = -\frac{1}{3} \\ \text{III: } -2 &= -2 + u \cdot 3 && \iff u = 0 \quad \zeta \end{aligned}$$

Der Punkt $(4 | 2 | -2)$ liegt also nicht auf h . Die Geraden g und h sind also echt parallel.

iii) oder iv) ?

Welche Lage haben die Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ zueinander?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \implies g \text{ und } h \text{ sind schneidend oder windschief.}$$

Gibt es einen Schnittpunkt?

$$\begin{aligned} \text{I: } 2 + t \cdot 5 &= -5 + u \cdot 1 && \iff u = 7 + 5 \cdot t = -2 \\ \text{II: } 2 + t \cdot (-2) &= 4 && \iff t = -1 \\ \text{III: } 4 + t \cdot 3 &= 2 + u \cdot (-2) && \iff u = \frac{2 + 3 \cdot t}{-2} = \frac{1}{2} \quad \zeta \end{aligned}$$

Es gibt keine Zahlen t und u , die alle 3 Gleichungen lösen.

Die Geraden g und h haben also keinen Schnittpunkt. Sie sind zueinander windschief.

