**Parameterdarstellung von Geraden im Raum**

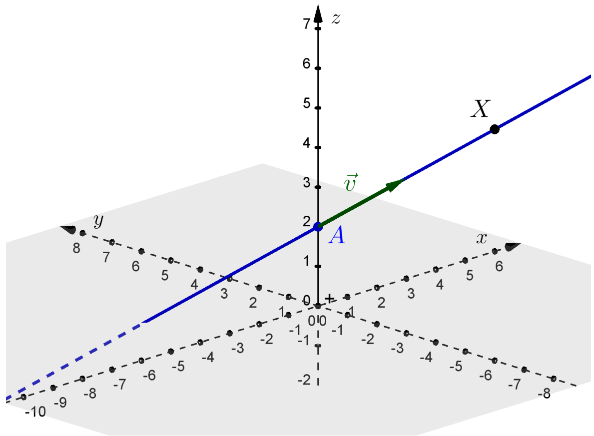
Die Gerade $g$ verläuft durch den Punkt $A$, und $\vec{v}$ ist ein Richtungsvektor der Gerade.
Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt

$$X = A + t \cdot \vec{v}$$

auf der Gerade.
Die Zahl $\boldsymbol{t}$ nennen wir **Parameter** und

$$\boldsymbol{g\colon X = A + t \cdot \vec{v}}$$

eine **Parameterdarstellung** der Gerade $g$.




Jeder Punkt $X$ auf der Gerade *entspricht genau einem* Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

**Gerade durch zwei Punkte**

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade durch die Punkte $A = (3 \mid -2 \mid 4)$ und $B = (5 \mid 1 \mid 0)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-(-2) \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Punkt auf Gerade?**

Gegeben ist die Gerade $h\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Parameterdarstellung.

Liegt der Punkt $P = (4 \mid -7 \mid 1)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad 4 &= 2 + t \cdot (-1) &\iff&\quad t = -2 \\ \text{II:}\quad -7 &= -1 + t \cdot 3 &\iff&\quad t = -2 \\ \text{III:}\quad 1 &= 3 + t \cdot 1 &\iff&\quad t = -2 \end{aligned}$$

Der Punkt $P$ liegt also auf der Gerade $h$.
Der Parameterwert $t = -2$ liefert diesen Punkt $P$.

Liegt der Punkt $Q = (-1 \mid 8 \mid 5)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad -1 &= 2 + t \cdot (-1) &\iff&\quad t = 3 \\ \text{II:}\quad 8 &= -1 + t \cdot 3 &\iff&\quad t = 3 \\ \text{III:}\quad 5 &= 3 + t \cdot 1 &\iff&\quad t = 2 \end{aligned}$$

Der Punkt $Q$ liegt also *nicht* auf der Gerade $h$.
Es gibt keine Zahl $t \in \mathbb{R}$, die *alle drei* Gleichungen erfüllt.

**Punkt auf Gerade**

Berechne $a$ und $b$ so, dass die Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ den Punkt $P = (4 \mid 2 \mid 0)$ enthält.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{I: } 4 = 1 + t \cdot b &&\iff b = \frac{3}{t} \overset{\text{II}}{\iff} b = -2 \\ &\text{II: } 2 = 5 + t \cdot 2 &&\iff t = -\frac{3}{2} \\ &\text{III: } 0 = a + t \cdot (-4) &&\iff a = 4 \cdot t \overset{\text{II}}{\iff} a = -6 \end{aligned}$$

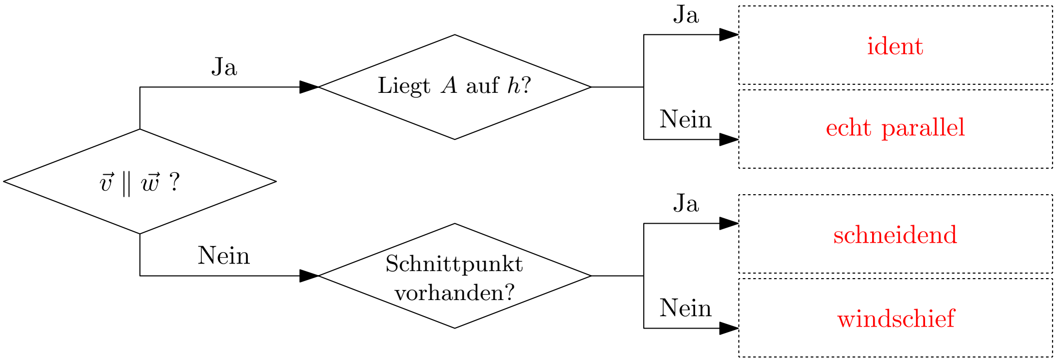
**Lagebeziehung zweier Geraden im Raum**

Zwei Geraden im Raum haben genau eine der 4 folgenden Lagebeziehungen: $\begin{cases}\text{schneidend}\\ \text{echt parallel}\\ \text{ident}\\ \text{windschief}\end{cases}$

Erkläre, wie du die Lagebeziehung zweier Geraden $g$ und $h$ aus den Parameterdarstellungen

$$g\colon X = A + t\cdot\vec{v} \quad \text{und} \quad h\colon X = B + u\cdot\vec{w}$$

ermitteln kannst. Trage dazu die 4 Lagebeziehungen richtig in die Kästchen ein:




**Ident oder echt parallel?**

Welche Lage haben die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}$ zueinander?

$\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix} = -1{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix} \implies$ $g$ und $h$ sind ident oder echt parallel.

Liegt der Punkt $(4 \mid 2 \mid -2)$ auf $h$?

$$\begin{aligned} &\text{I:} && 4 = 3 + u\cdot(-3) && \iff && u = -\frac{1}{3}\\ &\text{II:} && 2 = u\cdot(-6) && \iff && u = -\frac{1}{3}\\ &\text{III:} && -2 = -2 + u\cdot 3 && \iff && u = 0 \quad ↯ \end{aligned}$$

Der Punkt $(4 \mid 2 \mid -2)$ liegt also nicht auf $h$. Die Geraden $g$ und $h$ sind also echt parallel.

**Schneidend oder windschief?**

Welche Lage haben die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ zueinander?

$\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \implies$ $g$ und $h$ sind schneidend oder windschief.

Gibt es einen Schnittpunkt?

$$\begin{aligned} &\text{I:} && 2 + t\cdot 5 = -5 + u\cdot 1 && \iff && u = 7 + 5\cdot t = -2\\ &\text{II:} && 2 + t\cdot(-2) = 4 && \iff && t = -1\\ &\text{III:} && 4 + t\cdot 3 = 2 + u\cdot(-2) && \iff && u = \frac{2 + 3\cdot t}{-2} = \frac{1}{2} \quad ↯ \end{aligned}$$

Es gibt keine Zahlen $t$ und $u$, die alle 3 Gleichungen lösen.
Die Geraden $g$ und $h$ haben also keinen Schnittpunkt. Sie sind zueinander windschief.