Parameterdarstellung von Geraden im Raum

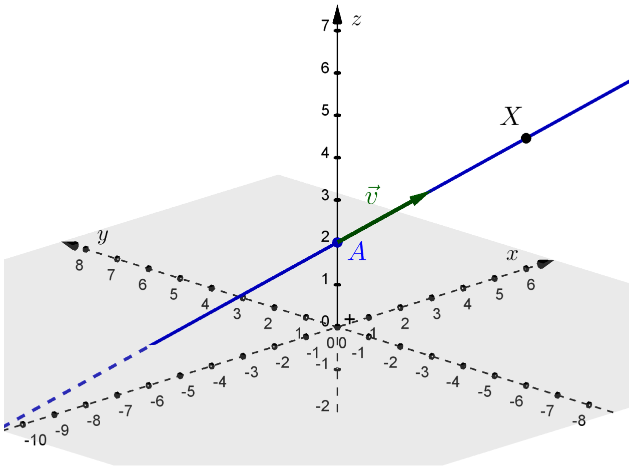
Die Gerade g verläuft durch den Punkt A.
$\vec{v}$ ist ein Richtungsvektor der Gerade.
Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt

$$X = A + t \cdot \vec{v}$$

auf der Gerade.
Die Zahl $\boldsymbol{t}$ nennen wir **Parameter** und

$$\boldsymbol{g\colon X = A + t \cdot \vec{v}}$$

eine **Parameterdarstellung** der Gerade.



Jeder Punkt auf der Gerade *entspricht genau einem* Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

Gerade durch zwei Punkte

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade durch die Punkte $A = (3 \mid -2 \mid 4)$ und $B = (5 \mid 1 \mid 0)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-(-2) \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt auf Gerade?

Gegeben ist die Gerade $h\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Parameterdarstellung.

Liegt der Punkt $P = (4 \mid -7 \mid 1)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen komponentenweise:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad 4 &= 2 + t \cdot (-1) &&\iff && t = -2 \\ \text{II:}\quad -7 &= -1 + t \cdot 3 &&\iff && t = -2 \\ \text{III:}\quad 1 &= 3 + t \cdot 1 &&\iff && t = -2 \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt also auf der Gerade h.
Der Wert $t = -2$ des Parameters liefert diesen Punkt P.

Liegt der Punkt $Q = (-1 \mid 8 \mid 5)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen komponentenweise:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad -1 &= 2 + t \cdot (-1) &&\iff && t = 3 \\ \text{II:}\quad 8 &= -1 + t \cdot 3 &&\iff && t = 3 \\ \text{III:}\quad 5 &= 3 + t \cdot 1 &&\iff && t = 2 \end{aligned}$$

Der Punkt Q liegt also *nicht* auf der Gerade h.
Es gibt keinen Wert $t \in \mathbb{R}$, der *alle drei* Gleichungen erfüllt.

Punkt auf Gerade

Berechne a und b so, dass der Punkt $P = (4 \mid 2 \mid 0)$ auf der Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{I: } 4 = 1 + t \cdot b &&\iff && b = \frac{3}{t} = -2 \\ &\text{II: } 2 = 5 + t \cdot 2 &&\iff && t = -\frac{3}{2} \\ &\text{III: } 0 = a + t \cdot (-4) &&\iff && a = 4 \cdot t = -6 \end{aligned}$$

Richtung / Orientierung

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben dieselbe **Richtung**, wenn $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$ mit einer Zahl $r \neq 0$ gilt.

Wir schreiben dann $\vec{v} \parallel \vec{w}$ und sagen: „Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **parallel**.“ $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben dieselbe **Orientierung**, wenn $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$ mit einer Zahl $r > 0$ gilt.

Lagebeziehung zweier Geraden im Raum

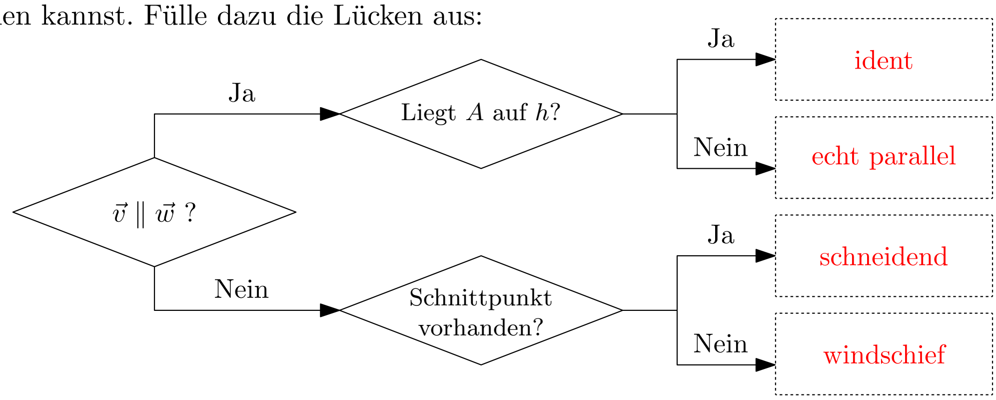
Zwei Geraden im Raum haben genau eine der 4 folgenden Lagebeziehungen:

1) schneidend **2)** echt parallel **3)** ident oder **4)** windschief

Erkläre, wie du die Lagebeziehung zweier Geraden g und h aus den Parameterdarstellungen

$$g\colon X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad h\colon X = B + u \cdot \vec{w}$$

bestimmen kannst. Fülle dazu die Lücken aus:



Ident oder echt parallel?

Welche Lage haben die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ zueinander?

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \implies$ g und h sind ident oder echt parallel. Liegt $(4 \mid 2 \mid -2)$ auf h?

$$\begin{aligned}
&\text{I:} \quad 4 = 3 + u \cdot (-3) && \iff && u = -\frac{1}{3} \\
&\text{II:} \quad 2 = u \cdot (-6) && \iff && u = -\frac{1}{3} \\
&\text{III:} \; -2 = -2 + u \cdot 3 && \iff && u = 0 \quad ⚡
\end{aligned}$$

g und h sind also echt parallel. (Wären die Geraden ident, müsste $(4 \mid 2 \mid -2)$ auf h liegen.)

Schneidend oder windschief?

Welche Lage haben die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ zueinander?

$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \implies$ g und h sind schneidend oder windschief. Gibt es einen Schnittpunkt?

$$\begin{aligned}
&\text{I:} \quad 2 + t \cdot 5 = -5 + u \cdot 1 && \iff && u = 7 + 5 \cdot t = -2 \\
&\text{II:} \; 2 + t \cdot (-2) = 4 && \iff && t = -1 \\
&\text{III:} \quad 4 + t \cdot 3 = 2 + u \cdot (-2) && \iff && u = \frac{2 + 3 \cdot t}{-2} = \frac{1}{2} \quad ⚡
\end{aligned}$$

g und h sind also windschief. (Es gibt keine Zahlen t und u, die einen gleichen Punkt liefern.)