

Parameterdarstellung von Geraden im Raum



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Die Gerade  $g$  verläuft durch den Punkt  $A$ .  
 $\vec{v}$  ist ein Richtungsvektor der Gerade.  
 Für jede Zahl  $t \in \mathbb{R}$  liegt der Punkt

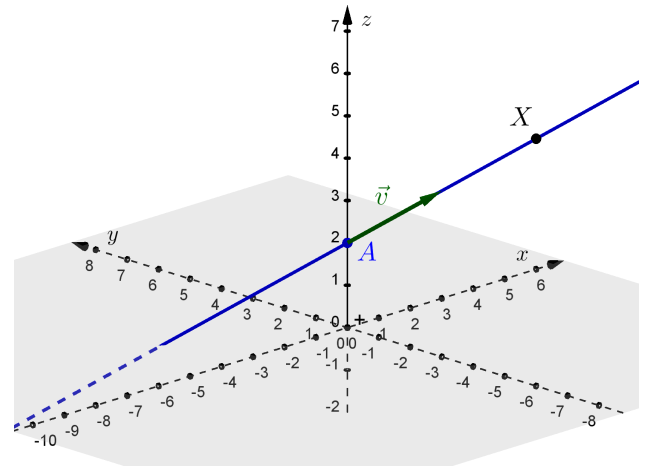
$$X = A + t \cdot \vec{v}$$

auf der Gerade.

Die Zahl  $t$  nennen wir **Parameter** und

$$g: X = A + t \cdot \vec{v}$$

eine **Parameterdarstellung** der Gerade.



Jeder Punkt auf der Gerade *entspricht genau einem* Wert des Parameters  $t \in \mathbb{R}$ .

Gerade durch zwei Punkte



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade durch die Punkte  $A = (3 \mid -2 \mid 4)$  und  $B = (5 \mid 1 \mid 0)$ .

Punkt auf Gerade?



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Gegeben ist die Gerade  $h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  in Parameterdarstellung.

Liegt der Punkt  $P = (4 \mid -7 \mid 1)$  auf der Gerade?  
 Die Frage ist, ob es eine Zahl  $t \in \mathbb{R}$  gibt, mit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen komponentenweise:

$$\begin{aligned} \text{I: } 4 &= 2 + t \cdot (-1) && \iff && t = -2 \\ \text{II: } -7 &= -1 + t \cdot 3 && \iff && t = -2 \\ \text{III: } 1 &= 3 + t \cdot 1 && \iff && t = -2 \end{aligned}$$

Der Punkt  $P$  liegt also auf der Gerade  $h$ .

Der Wert  $t = -2$  des Parameters liefert diesen Punkt  $P$ .

Liegt der Punkt  $Q = (-1 \mid 8 \mid 5)$  auf der Gerade?  
 Die Frage ist, ob es eine Zahl  $t \in \mathbb{R}$  gibt, mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen komponentenweise:

$$\begin{aligned} \text{I: } -1 &= 2 + t \cdot (-1) && \iff && t = 3 \\ \text{II: } 8 &= -1 + t \cdot 3 && \iff && t = 3 \\ \text{III: } 5 &= 3 + t \cdot 1 && \iff && t = 2 \end{aligned}$$

Der Punkt  $Q$  liegt also *nicht* auf der Gerade  $h$ .

Es gibt keinen Wert  $t \in \mathbb{R}$ , der *alle drei* Gleichungen erfüllt.

Punkt auf Gerade



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Berechne  $a$  und  $b$  so, dass der Punkt  $P = (4 \mid 2 \mid 0)$  auf der Gerade  $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  liegt.

Richtung / Orientierung



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Zwei Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  haben dieselbe **Richtung**, wenn  $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$  mit einer Zahl  $r \neq 0$  gilt.

Wir schreiben dann  $\vec{v} \parallel \vec{w}$  und sagen: „Die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind **parallel**.“  $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zwei Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  haben dieselbe **Orientierung**, wenn  $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$  mit einer Zahl  $r > 0$  gilt.

Lagebeziehung zweier Geraden im Raum



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

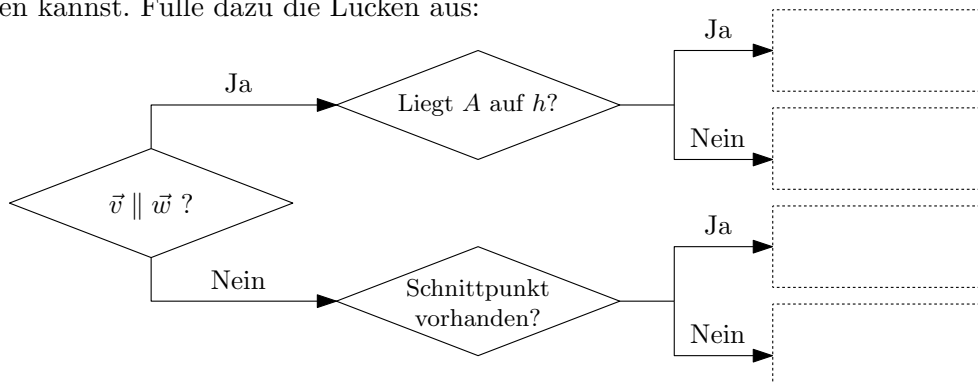
Zwei Geraden im Raum haben genau eine der 4 folgenden Lagebeziehungen:

- 1) schneidend 2) echt parallel 3) ident oder 4) windschief

Erkläre, wie du die Lagebeziehung zweier Geraden  $g$  und  $h$  aus den Parameterdarstellungen

$$g: X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad h: X = B + u \cdot \vec{w}$$

bestimmen kannst. Fülle dazu die Lücken aus:



Ident oder echt parallel?



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Welche Lage haben die Geraden  $g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$  zueinander?

Schneidend oder windschief?



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Welche Lage haben die Geraden  $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $h: X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  zueinander?