Produktregel

Die Funktion p ist das Produkt von zwei differenzierbaren Funktionen f und g:

$$\boldsymbol{p(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

Die Ableitungsfunktion von p können wir systematisch mit der **Produktregel** ermitteln:

$$\boldsymbol{p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion p' von $p(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)$.

$$p'(x) = 6 \cdot x \cdot \cos(x) - 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x)$$

Stammfunktion von p

Für die Funktion p gilt: $p(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)$

Eine Stammfunktion P der Funktion p soll ermittelt werden.

Lukas meint: „ *x^3 ist eine Stammfunktion von $3 \cdot x^2$ und Sinus ist eine Stammfunktion von Cosinus. Also ist $x^3 \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von p.*“

1) Begründe, warum die Behauptung von Lukas *falsch* ist.

2) Zeige, dass $P(x) = 6 \cdot x \cdot \cos(x) + (3 \cdot x^2 - 6) \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von p ist.

1) Die Probe mit der Produktregel zeigt, dass die Behauptung falsch ist:

$$[x^3 \cdot \sin(x)]' = 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x) \neq 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) \quad \text{(z.B. an der Stelle } x = \tfrac{\pi}{2}\text{)}$$

2) Wir ermitteln P' mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 6 \cdot \cos(x) + 6 \cdot x \cdot (-\sin(x)) + 6 \cdot x \cdot \sin(x) + (3 \cdot x^2 - 6) \cdot \cos(x) = \\ &= 6 \cdot \cos(x) - 6 \cdot x \cdot \sin(x) + 6 \cdot x \cdot \sin(x) + 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) - 6 \cdot \cos(x) = \\ &= 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) = p(x) \ \checkmark \end{aligned}$$

Partielle Integration

Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus dem Produkt p zweier Funktionen systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion P zu ermitteln.

Die **partielle Integration** ist eine Methode, die dabei helfen *kann*.

Aus der Produktregel folgt nämlich:

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Merkhilfe:

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

Integrieren Ableiten

Jede Stammfunktion von der linken Seite ist auch eine Stammfunktion von der rechten Seite und umgekehrt.

Wenn wir eine Stammfunktion von $f \cdot g'$ suchen, dann können wir also stattdessen auch eine Stammfunktion von g' und eine Stammfunktion von $f' \cdot g$ ermitteln.

Partielle Integration

Die Funktion p mit $p(x) = x \cdot \cos(x)$ ist ein Produkt von zwei Funktionen.

Das Ermitteln einer Stammfunktion P dieser Funktion p ist *nicht* offensichtlich.

Wenn wir aber die eine Funktion ableiten und die andere Funktion integrieren,
dann können wir vom Ergebnis eine Stammfunktion ermitteln.

Wir stellen zwei Schreibweisen für diese Methode der **partiellen Integration** vor:

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

Aus $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$ folgt durch Integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Es gilt also:

$$\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Integrieren Ableiten

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

Aus $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$ folgt:

$$p(x) = x \cdot \cos(x) = [\,x \cdot \sin(x)\,]' - 1 \cdot \sin(x) = [\,x \cdot \sin(x) + \cos(x)\,]'$$

Integrieren Ableiten

Jede Stammfunktionen P von $p(x) = x \cdot \cos(x)$ hat also die folgende Form:

$$P(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Kluge 1

Ermittle jene Stammfunktion P von $p(x) = \ln(x)$, die $P(1) = 5$ erfüllt.

Hinweis: $p(x) = \ln(x) \cdot 1$

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \ln(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x = \ln(x) \cdot x - \int \underbrace{\tfrac{1}{x} \cdot x}_{=1}\,\mathrm{d}x = \ln(x) \cdot x - x + c$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$p(x) = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} = [\,\underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,]' - \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} = [\,\ln(x) \cdot x\,]' - 1 = [\,\ln(x) \cdot x - x\,]'$$

$$\implies P(x) = \ln(x) \cdot x - x + c$$

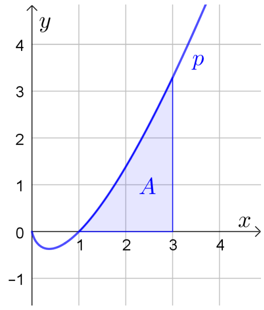
Die Integrationskonstante c berechnen wir aus der Bedingung $P(1) = 5$:

$$P(1) = 5 \implies 0 - 1 + c = 5 \implies c = 6 \implies P(x) = \ln(x) \cdot x - x + 6$$

Bestimmtes Integral

Für die rechts dargestellte Funktion p gilt: $p(x) = x \cdot \ln(x)$

Entscheide mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, ob für den dargestellten Flächeninhalt $A < 3$, $A = 3$ oder $A > 3$ gilt.



Es gilt: $A = \int_1^3 p(x)\,\mathrm{d}x$

Um eine Stammfunktion P von $x \cdot \ln(x)$ zu ermitteln, leiten wir den Faktor $\ln(x)$ ab und integrieren den Faktor x.

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \int \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{x^2 \cdot \tfrac{1}{x}}_{=x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4} \cdot x^2}_{=P(x)} + c$$

Für die Berechnung mit dem Hauptsatz können wir eine *beliebige* Stammfunktion P verwenden, zum Beispiel jene mit $c = 0$.

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$p(x) = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g'(x)} = [\underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot x^2}_{g(x)}]' - \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot x^2}_{g(x)} = [\underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4} \cdot x^2}_{=P(x)}]'$$

Wir berechnen A mit dem Hauptsatz:

$$A = \int_1^3 p(x)\,\mathrm{d}x = P(3) - P(1) = \tfrac{9}{2} \cdot \ln(3) - \tfrac{9}{4} - (0 - \tfrac{1}{4}) = 2{,}943... < 3$$

Im Kreis gelaufen?

Ermittle eine Stammfunktion P von $p(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.

Um eine Stammfunktion P von $\sin(x) \cdot \cos(x)$ zu ermitteln, leiten wir $\sin(x)$ ab und integrieren $\cos(x)$.

Auch die andere Option ist zielführend.

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\underbrace{\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=\text{☺}} = \sin(x) \cdot \sin(x) - \underbrace{\int \cos(x) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x}_{=\text{☺}} \qquad | +\text{☺}$$

$$\implies 2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x) + c_1 \implies \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2(x)}{2} + c \qquad c = \tfrac{c_1}{2}$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} = [\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}]' - \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}$$

$$\implies 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = [\sin^2(x)]' \implies \sin(x) \cdot \cos(x) = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]'$$

Eine Stammfunktion P von p ist also zum Beispiel:

$$P(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

Pythagoras

Ermittle alle Stammfunktionen P von $p(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$.

Hinweis: Pythagoras am Einheitskreis
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\underbrace{\int \sin(x) \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x}_{=☺} = -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \underbrace{\cos(x) \cdot \cos(x)}_{1-\sin(x) \cdot \sin(x)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \underbrace{\int \sin(x) \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x}_{=☺}$$

$$\implies \int \sin(x) \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{x - \cos(x) \cdot \sin(x)}{2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$\underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} = [\underbrace{-\cos(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}]' - \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} = [-\cos(x) \cdot \sin(x)]' + 1 - \sin(x) \cdot \sin(x)$$

$$\implies 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(x) = [x - \cos(x) \cdot \sin(x)]' \implies \sin(x) \cdot \sin(x) = \left[\frac{x - \cos(x) \cdot \sin(x)}{2}\right]'$$

Jede Stammfunktion P von p hat also die folgende Form:

$$P(x) = \frac{x - \cos(x) \cdot \sin(x)}{2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Schritt für Schritt

Ermittle alle Stammfunktionen P von $p(x) = x^2 \cdot e^x$.

Um eine Stammfunktion P von $x^2 \cdot e^x$ zu ermitteln, leiten wir x^2 ab und integrieren e^x.

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\int x^2 \cdot e^x\, \mathrm{d}x = x^2 \cdot e^x - \int 2 \cdot x \cdot e^x\, \mathrm{d}x =$$

$$= x^2 \cdot e^x - \left[2 \cdot x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\, \mathrm{d}x\right] =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$\underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} = [\underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}]' - \underbrace{2 \cdot x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}$$

$$\underbrace{2 \cdot x}_{a(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{b'(x)} = [\underbrace{2 \cdot x}_{a(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{b(x)}]' - \underbrace{2}_{a'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{b(x)} = [2 \cdot x \cdot e^x - 2 \cdot e^x]'$$

$$\implies x^2 \cdot e^x = \left[x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x\right]'$$

Jede Stammfunktion P von p hat also die folgende Form:

$$P(x) = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$