



Die Funktion p ist das Produkt von zwei **differenzierbaren** Funktionen f und g :

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Die **Ableitungsfunktion** von p können wir systematisch mit der **Produktregel** ermitteln:

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion p' von $p(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)$.

$$p'(x) = 6 \cdot x \cdot \cos(x) - 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x)$$



Für die Funktion p gilt: $p(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)$

Eine **Stammfunktion** P der Funktion p soll ermittelt werden.

Lukas meint: „ x^3 ist eine Stammfunktion von $3 \cdot x^2$ und Sinus ist eine Stammfunktion von Cosinus. Also ist $x^3 \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von p .“

- 1) Begründe, warum die Behauptung von Lukas *falsch* ist.
- 2) Zeige, dass $P(x) = 6 \cdot x \cdot \cos(x) + (3 \cdot x^2 - 6) \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von p ist.

1) Die Probe mit der Produktregel zeigt, dass die Behauptung falsch ist:

$$[x^3 \cdot \sin(x)]' = 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x) \neq 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) \quad (\text{z.B. an der Stelle } x = \frac{\pi}{2})$$

2) Wir ermitteln P' mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 6 \cdot \cos(x) + 6 \cdot x \cdot (-\sin(x)) + 6 \cdot x \cdot \sin(x) + (3 \cdot x^2 - 6) \cdot \cos(x) = \\ &= 6 \cdot \cos(x) - 6 \cdot x \cdot \sin(x) + 6 \cdot x \cdot \sin(x) + 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) - 6 \cdot \cos(x) = \\ &= 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) = p(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$



Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus dem Produkt p zweier Funktionen systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion P zu ermitteln.

Die **partielle Integration** ist eine Methode, die dabei helfen *kann*.

Aus der Produktregel folgt nämlich:

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Jede Stammfunktion von der linken Seite ist auch eine Stammfunktion von der rechten Seite und umgekehrt.

Wenn wir eine Stammfunktion von $f \cdot g'$ suchen, dann können wir also stattdessen auch eine Stammfunktion von g' und eine Stammfunktion von $f' \cdot g$ ermitteln.

Merkhilfe:

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

Integrieren Ableiten

Die Funktion p mit $p(x) = x \cdot \cos(x)$ ist ein Produkt von zwei Funktionen.

Das Ermitteln einer Stammfunktion P dieser Funktion p ist *nicht* offensichtlich.

Wenn wir aber **die eine Funktion ableiten** und **die andere Funktion integrieren**, dann können wir vom Ergebnis eine Stammfunktion ermitteln.

Wir stellen zwei Schreibweisen für diese Methode der **partiellen Integration** vor:

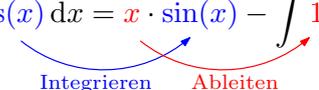
Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

Aus $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$ folgt durch Integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Es gilt also:

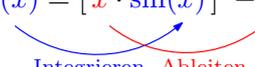
$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$



Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

Aus $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$ folgt:

$$p(x) = x \cdot \cos(x) = [x \cdot \sin(x)]' - 1 \cdot \sin(x) = [x \cdot \sin(x) + \cos(x)]'$$



Jede Stammfunktionen P von $p(x) = x \cdot \cos(x)$ hat also die folgende Form:

$$P(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Ermittle jene Stammfunktion P von $p(x) = \ln(x)$, die $P(1) = 5$ erfüllt.

Hinweis: $p(x) = \ln(x) \cdot 1$

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 dx = \ln(x) \cdot x - \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{=1} dx = \ln(x) \cdot x - x + c$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$p(x) = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} = [\underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}]' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} = [\ln(x) \cdot x]' - 1 = [\ln(x) \cdot x - x]'$$

$$\implies P(x) = \ln(x) \cdot x - x + c$$

Die Integrationskonstante c berechnen wir aus der Bedingung $P(1) = 5$:

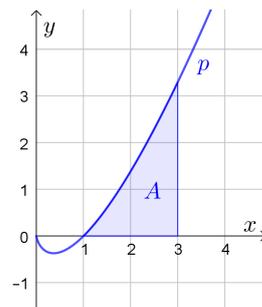
$$P(1) = 5 \implies 0 - 1 + c = 5 \implies c = 6 \implies P(x) = \ln(x) \cdot x - x + 6$$

Für die rechts dargestellte Funktion p gilt: $p(x) = x \cdot \ln(x)$

Entscheide mit dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, ob für den dargestellten Flächeninhalt $A < 3$, $A = 3$ oder $A > 3$ gilt.

Es gilt: $A = \int_1^3 p(x) dx$

Um eine Stammfunktion P von $x \cdot \ln(x)$ zu ermitteln, leiten wir den Faktor $\ln(x)$ ab und integrieren den Faktor x .



Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \int \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}}_{=x} dx = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2}_{=P(x)} + c$$

Für die Berechnung mit dem Hauptsatz können wir eine beliebige Stammfunktion P verwenden, zum Beispiel jene mit $c = 0$.

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$p(x) = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g'(x)} = [\underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^2}_{g(x)}]' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^2}_{g(x)} = [\underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2}_{=P(x)}]'$$

Wir berechnen A mit dem Hauptsatz:

$$A = \int_1^3 p(x) dx = P(3) - P(1) = \frac{9}{2} \cdot \ln(3) - \frac{9}{4} - (0 - \frac{1}{4}) = 2,943... < 3$$

Ermittle eine Stammfunktion P von $p(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.

Um eine Stammfunktion P von $\sin(x) \cdot \cos(x)$ zu ermitteln, leiten wir $\sin(x)$ ab und integrieren $\cos(x)$.
 Auch die andere Option ist zielführend.

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\int \underbrace{\sin(x) \cdot \cos(x)}_{=\ominus} dx = \sin(x) \cdot \sin(x) - \int \underbrace{\cos(x) \cdot \sin(x)}_{=\ominus} dx \quad | +\ominus$$

$$\implies 2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \sin^2(x) + c_1 \implies \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + c \quad c = \frac{c_1}{2}$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$\sin(x) \cdot \cos(x) = [\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}]' - \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}$$

$$\implies 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = [\sin^2(x)]' \implies \sin(x) \cdot \cos(x) = \left[\frac{\sin^2(x)}{2} \right]'$$

Eine Stammfunktion P von p ist also zum Beispiel:

$$P(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

Ermittle alle Stammfunktionen P von $p(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$.

Hinweis: Pythagoras am Einheitskreis

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sin(x) \cdot \sin(x)}_{=\ominus} dx &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \underbrace{\cos(x) \cdot \cos(x)}_{1 - \sin(x) \cdot \sin(x)} dx = \\ &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \underbrace{\sin(x) \cdot \sin(x)}_{=\ominus} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sin(x) \cdot \sin(x) dx = \frac{x - \cos(x) \cdot \sin(x)}{2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$\underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} = \underbrace{[-\cos(x) \cdot \sin(x)]'}_{f(x)} - \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} = \underbrace{[-\cos(x) \cdot \sin(x)]'}_{f(x)} + 1 - \sin(x) \cdot \sin(x)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(x) = [x - \cos(x) \cdot \sin(x)]' \Rightarrow \sin(x) \cdot \sin(x) = \left[\frac{x - \cos(x) \cdot \sin(x)}{2} \right]'$$

Jede Stammfunktion P von p hat also die folgende Form:

$$P(x) = \frac{x - \cos(x) \cdot \sin(x)}{2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Ermittle alle Stammfunktionen P von $p(x) = x^2 \cdot e^x$.

Um eine Stammfunktion P von $x^2 \cdot e^x$ zu ermitteln, leiten wir x^2 ab und integrieren e^x .

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x dx &= x^2 \cdot e^x - \int 2 \cdot x \cdot e^x dx = \\ &= x^2 \cdot e^x - \left[2 \cdot x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx \right] = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

$$\underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} = \underbrace{[x^2 \cdot e^x]'}_{f(x)} - \underbrace{2 \cdot x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}$$

$$\underbrace{2 \cdot x}_{a(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{b'(x)} = \underbrace{[2 \cdot x \cdot e^x]'}_{a(x)} - \underbrace{2}_{a'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{b(x)} = [2 \cdot x \cdot e^x - 2 \cdot e^x]'$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot e^x = [x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x]'$$

Jede Stammfunktion P von p hat also die folgende Form:

$$P(x) = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

