Pascalsches Dreieck

Erinnere dich, wie das **Pascalsche Dreieck** beim Ausmultiplizieren von Binomen hilft:

$(a+b)^0 = 1$					1				
$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$				1		1			
$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$			1		2		1		
$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$		1		3		3		1	
$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$	1		4		6		4		1

Pascalsches Dreieck ↔ Binomialkoeffizienten

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind genau die folgenden Binomialkoeffizienten:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Diesen Zusammenhang können wir kombinatorisch erklären:

1) Es gilt $\binom{5}{5} = 1$ und allgemein $\binom{n}{n} = 1$.

Um aus 5 Personen eine Gruppe mit 5 Personen auszuwählen, gibt es nur eine Möglichkeit.

Es gilt $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$ und allgemein $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

In beiden Dreiecken ist also jede Zahl am linken und rechten Rand 1.

2) Im Pascalschen Dreieck ist jede Zahl im Inneren die Summe der beiden Nachbarzahlen darüber.

Die entsprechende Gleichung im rechten Dreieck ist $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Tatsächlich gilt zum Beispiel $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, denn auf beiden Seiten der Gleichung wird das gleiche Abzählproblem gelöst:

$\binom{5}{3}$ ist die Anzahl an Möglichkeiten, um aus 5 Personen eine Gruppe mit 3 Personen auszuwählen.

Die größte der 5 Personen kannst du *entweder* für die Gruppe auswählen *oder* nicht auswählen.

- Wenn du sie auswählst, musst du aus den anderen 4 Personen noch eine Gruppe mit 2 Personen auswählen. Dafür gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten.
- Wenn du sie *nicht* auswählst, musst du aus den anderen 4 Personen noch eine Gruppe mit 3 Personen auswählen. Dafür gibt es $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten.

Nach der Additionsregel ist also auch $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ die Anzahl an Möglichkeiten, um aus 5 Personen eine Gruppe mit 3 Personen auszuwählen.

In beiden Dreiecken stimmen also auch die Zahlen im Inneren überein.

Binomialkoeffizienten $\leftrightarrow (a+b)^n$

Wir multiplizieren den Term $(a+b)^3$ aus und vereinfachen erst im letzten Schritt:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b)\cdot(a+b) = \\ &= a\cdot a\cdot a + a\cdot b\cdot a + b\cdot a\cdot a + b\cdot b\cdot a + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot b + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot b = \\ &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3\end{aligned}$$

Angenommen wir multiplizieren $(a+b)^5 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$ ohne zu vereinfachen aus.
Nach der Multiplikationsregel erhalten wir insgesamt $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$ Summanden.

Denn wir können uns bei jeder Klammer *unabhängig* entweder für a oder für b entscheiden.

Einer dieser Summanden ist zum Beispiel $a\cdot b\cdot a\cdot a\cdot b = a^3\cdot b^2$.
Den gleichen Summanden $a^3\cdot b^2$ erhalten wir beim Ausmultiplizieren aber auf verschiedene Arten.

Um $a^3\cdot b^2$ zu erhalten, müssen wir uns bei den $n=5$ verschiedenen Klammern genau $k=2$ Mal für b entscheiden.

Der Summand $a^3\cdot b^2$ kommt beim Ausmultiplizieren also insgesamt $\binom{5}{2} = 10$ Mal vor.

Das ist eine kombinatorische Erklärung für den sogenannten **Binomischen Lehrsatz**:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}\cdot a^5\cdot b^0 + \binom{5}{1}\cdot a^4\cdot b^1 + \binom{5}{2}\cdot a^3\cdot b^2 + \binom{5}{3}\cdot a^2\cdot b^3 + \binom{5}{4}\cdot a^1\cdot b^4 + \binom{5}{5}\cdot a^0\cdot b^5 \\ &= 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a\cdot b^4 + 1\cdot b^5\end{aligned}$$

Deshalb heißt $\binom{n}{k}$ auch **Binomialkoeffizient**.

$a+b$ ist ein *Binom*. $\binom{n}{k}$ ist der *Koeffizient* von $a^{n-k}\cdot b^k$ beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$.

Multinomialkoeffizient

Angenommen wir multiplizieren

$$(x+y+z)^9 = (x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot\ldots\cdot(x+y+z)$$

ohne zu vereinfachen aus. Dann erhalten wir insgesamt $3^9 = 19\,683$ Summanden.
Erkläre, warum dabei kein Summand $x^3\cdot y^5\cdot z^2$ vorkommen kann.

Die Summe der Exponenten ist $3+5+2=10$.
Sie müsste aber 9 sein, weil es 9 Klammern gibt.

Wie oft erhalten wir beim Vereinfachen am Ende den Summanden $x^2\cdot y^4\cdot z^3$?

Hinweis: Es ist genau die Anzahl möglicher Farbmuster beim Anordnen von 2 blauen, 4 roten und 3 grünen Kugeln in einer Reihe.
Am Arbeitsblatt – Kombinatorik findest du mehr dazu.

$$\frac{9!}{2!\cdot 4!\cdot 3!} = 1260$$

Multinomialkoeffizienten

Allgemein schreiben wir auch

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \quad \text{mit } k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$$

und nennen den Ausdruck einen **Multinomialkoeffizienten**.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at