Pascalsches Dreieck

Erinnere dich, wie das **Pascalsche Dreieck** beim Ausmultiplizieren von Binomen hilft:

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$	1 1
$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$	1 4 6 4 1

Pascalsches Dreieck ↔ Binomialkoeffizienten

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind genau die folgenden Binomialkoeffizienten:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{1} \end{array} = \begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \end{array}$$

Kombinatorisch können wir das erklären:

1) Es gilt $\binom{5}{5} = \_\_\_\_\_$ und allgemein $\binom{n}{n} = \_\_\_\_\_$.

Um aus 5 Personen eine Gruppe mit 5 Personen auszuwählen, gibt es nur eine Möglichkeit.

2) Es gilt $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = \_\_\_\_\_$ und allgemein $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \_\_\_\_\_$. $\quad 0! = 1$

In beiden Dreiecken ist also jede Zahl am linken und rechten Rand 1.

3) Im Pascalschen Dreieck ist jede Zahl im Inneren die Summe der beiden Nachbarzahlen darüber.

Die entsprechende Gleichung im rechten Dreieck ist $\binom{n}{k} = \binom{\square}{\square} + \binom{\square}{\square}$.

Tatsächlich gilt zum Beispiel $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, denn auf beiden Seiten der Gleichung wird das gleiche Abzählproblem gelöst:

$\binom{5}{3}$ ist die Anzahl an Möglichkeiten, um aus 5 Personen eine Gruppe mit 3 Personen auszuwählen.

Die größte der 5 Personen kannst du entweder für die Gruppe auswählen oder *nicht* auswählen.

- Wenn du sie auswählst, musst du aus den anderen 4 Personen noch eine Gruppe mit _____ Personen auswählen. Dafür gibt es $\binom{\square}{\square}$ Möglichkeiten.
- Wenn du sie *nicht* auswählst, musst du aus den anderen 4 Personen noch eine Gruppe mit _____ Personen auswählen. Dafür gibt es $\binom{\square}{\square}$ Möglichkeiten.

Also stimmen auch die Zahlen im Inneren der beiden Dreiecke überein.

Binomialkoeffizienten ↔ $(a+b)^n$

Wir multiplizieren den Term $(a+b)^3$ aus und vereinfachen erst im letzten Schritt:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b)\cdot(a+b) = \\ &= a\cdot a\cdot a + a\cdot b\cdot a + b\cdot a\cdot a + b\cdot b\cdot a + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot b + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot b = \\ &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3\end{aligned}$$

Angenommen wir multiplizieren

$$(a+b)^5 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

ohne zu vereinfachen aus. Dann erhalten wir insgesamt ____________________ Summanden.

Bei jeder Klammer können wir uns *unabhängig* für a oder für b entscheiden.

Einer dieser Summanden ist zum Beispiel $a\cdot b\cdot a\cdot a\cdot b = a^3\cdot b^2$.
Den gleichen Summanden $a^3\cdot b^2$ erhalten wir beim Ausmultiplizieren aber auf verschiedene Arten.

Um $a^3\cdot b^2$ zu erhalten, müssen wir uns bei den $n=5$ verschiedenen Klammern genau $k=2$ Mal für b entscheiden.

Der Summand $a^3\cdot b^2$ kommt beim Ausmultiplizieren insgesamt $\binom{\square}{\square} =$ _____ Mal vor.

Das ist eine kombinatorische Erklärung für den sogenannten **Binomischen Lehrsatz**:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}\cdot a^5\cdot b^0 + \binom{5}{1}\cdot a^4\cdot b^1 + \binom{5}{2}\cdot a^3\cdot b^2 + \binom{5}{3}\cdot a^2\cdot b^3 + \binom{5}{4}\cdot a^1\cdot b^4 + \binom{5}{5}\cdot a^0\cdot b^5 \\ &= 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a\cdot b^4 + 1\cdot b^5\end{aligned}$$

Deshalb heißt $\binom{n}{k}$ auch **Binomialkoeffizient**.

$a+b$ ist ein *Binom*. $\binom{n}{k}$ ist der *Koeffizient* von $a^{n-k}\cdot b^k$ beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$.

Multinomialkoeffizient

Angenommen wir multiplizieren

$$(x+y+z)^9 = (x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot\ldots\cdot(x+y+z)$$

ohne zu vereinfachen aus. Dann erhalten wir insgesamt ____________________ Summanden.
Erkläre, warum dabei kein Summand $x^3\cdot y^5\cdot z^2$ vorkommen kann.

Wie oft erhalten wir beim Vereinfachen am Ende den Summanden $x^2\cdot y^4\cdot z^3$?

Hinweis: Es ist genau die Anzahl möglicher Farbmuster beim Anordnen von 2 blauen, 4 roten und 3 grünen Kugeln in einer Reihe.

Am Arbeitsblatt – Kombinatorik findest du mehr dazu.

Allgemein schreiben wir auch

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \qquad \text{mit } k_1+k_2+\cdots+k_r = n$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{k,\,n-k}$

und nennen den Ausdruck einen **Multinomialkoeffizienten**.