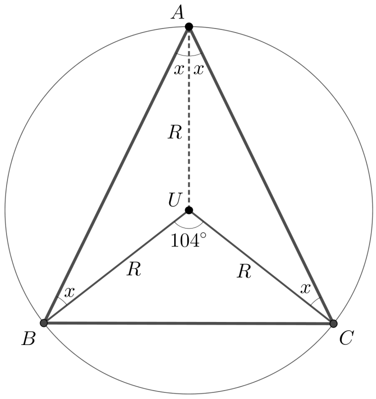
Eine Winkeljagd am Kreis

Aufgabe 1. *Im gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $b = c$ und Umkreismittelpunkt U kennen wir den Winkel $\angle BUC = 104°$. Bestimme den Winkel $\angle BAC$.*



Lösung. Wir beobachten zuerst, dass der Abstand von U zu den drei Eckpunkten des Dreiecks jeweils gleich dem Umkreisradius R ist. Die beiden Dreiecke ABU und ACU sind daher wegen $UA = UB = R$ und $UA = UC = R$ jeweils gleichschenkelig, und die Winkel, die den gleich langen Seiten gegenüber liegen sind daher jeweils gleich groß. Darüber hinaus wissen wir auch, dass das Dreieck ABC selbst gleichschenkelig ist mit $AB = AC$. Die Punkte B und C liegen somit symmetrisch bezüglich der Höhe AU, und die beiden gleichschenkeligen Dreiecke ABU und ACU sind daher ebenfalls symmetrisch, und somit kongruent. Wir sehen also, dass alle vier Winkel

$$\angle UBA = \angle BAU = \angle UAC = \angle ACU$$

gleich groß sind. Wir bezeichnen das Maß dieser Winkel als x.
Da die Summe der Innenwinkel in den Dreiecken ABU und ACU jeweils gleich 180° ist, erhalten wir somit

$$\angle AUB = \angle CUA = 180° - 2x.$$

Da

$$\angle AUB + \angle BUC + \angle CUA = 360°$$

gilt, erhalten wir

$$(180° - 2x) + 104° + (180° - 2x) = 360°,$$

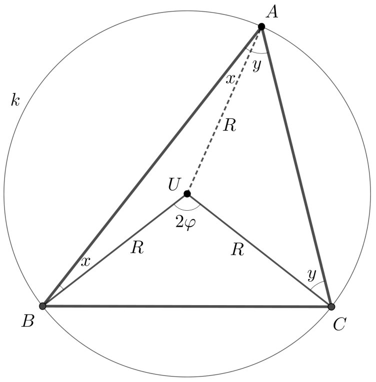
oder $2x = 52°$. Da $\angle BAC = \angle CAU + \angle BAU = 2x$ gilt, erhalten wir somit den gesuchten Winkel $\angle BAC = 52°$. □

Zufall?

Auf den ersten Blick scheint es vielleicht etwas überraschend zu sein, dass der Wert des Winkels $\angle BAC$ im vorangehenden Beispiel überhaupt eindeutig bestimmt ist. Wie sich aber herausstellt, ist dies ein spezieller Fall eines allgemeineren Sachverhalts.

U innerhalb von $\triangle ABC$

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt U und Sehne BC. Der Punkt A liege so auf k, dass U im Inneren des Dreiecks ABC liegt. Wir nennen $\angle BUC = 2\varphi$.*
Zeige, dass dann $\angle \mathbf{BAC} = \varphi$.



1) Erkläre, warum $\angle UBA = \angle BAU$ und $\angle UAC = \angle ACU$

Da der Abstand von U zu den drei Eckpunkten des Dreiecks ABC jeweils gleich dem Umkreisradius R ist, sind die beiden Dreiecke ABU und ACU wegen $UA = UB = R$ und $UA = UC = R$ jeweils gleichschenkelig, und die Winkel, die den gleich langen Seiten gegenüber liegen jeweils gleich groß. Wir sehen also, dass

$$\angle UBA = \angle BAU = x \quad \text{und} \quad \angle UAC = \angle ACU = y$$

2) Erkläre, warum aus

$$\angle AUB + \angle BUC + \angle CUA = 360°$$

folgt, dass

$$\angle BAC = \angle BAU + \angle UAC = \varphi$$

Das ist gleichbedeutend mit $\angle \mathbf{BUC} = \mathbf{2} \cdot \angle \mathbf{BAC}$

Wir setzen für $\angle AUB$, $\angle BUC$ und $\angle CUA$ ein:

$$(180° - 2x) + 2\varphi + (180° - 2y) = 360°$$

Dies ist gleichwertig mit

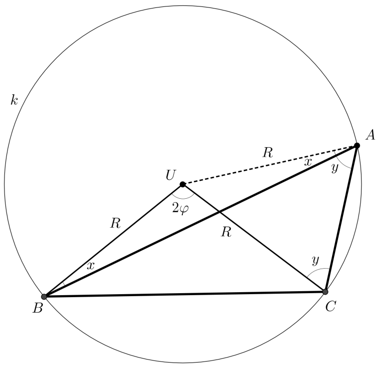
$$2\varphi = 2x + 2y = 2 \cdot (x + y),$$

also $\varphi = \angle BAU + \angle UAC = \angle BAC$.

Wie sich herausstellt, haben wir für die Gültigkeit dieses Ergebnisses sogar etwas zu viel vorausgesetzt. In den nächsten beiden Aufgaben 3 und 4 sehen wir, dass die Lage von A noch viel allgemeiner gewählt werden kann, ohne die Gültigkeit dieser Winkelbeziehung zu stören.

***U* außerhalb von $\triangle ABC$** MmF

Aufgabe 3. *Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt U und Sehne BC. Der Punkt A liege so auf dem größeren Bogen BC von k, dass U außerhalb des Dreiecks ABC liegt.*
Erkläre, warum $\angle \mathbf{BUC} = \mathbf{2} \cdot \angle \mathbf{BAC}$.



Wir können annehmen: A ist näher an C als an B.

Wäre es umgekehrt, könnte deine Begründung identisch ablaufen, unter Vertauschung der Rollen von B und C.

Diese Begründung verläuft fast identisch zur letzten. Es genügt eine Summe durch eine Differenz zu ersetzen.
Da der Abstand von U zu den drei Eckpunkten des Dreiecks ABC jeweils gleich dem Umkreisradius R ist, sind die beiden Dreiecke AUB und CAU wieder wegen $UA = UB = R$ und $UA = UC = R$ jeweils gleichschenkelig, und die Winkel, die den gleich langen Seiten gegenüber liegen jeweils gleich groß. Wir sehen also, dass wiederum

$$\angle ABU = \angle UAB = x \quad \text{und} \quad \angle UAC = \angle ACU = y$$

gilt.
Definieren wir nun wie in Aufgabe 2 $\angle BUC = 2\varphi$, gilt wegen

$$\angle BUA = \angle BUC + \angle CUA$$

sicher

$$(180° - 2x) = 2\varphi + (180° - 2y).$$

Dies ist gleichwertig mit

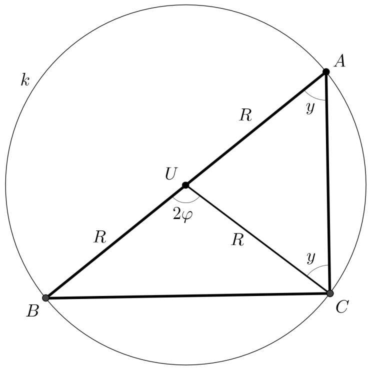
$$2\varphi = 2y - 2x = 2 \cdot (y - x),$$

und wir erhalten somit, wie behauptet

$$\angle BUC = 2\varphi = 2 \cdot (y - x) = 2 \cdot (\angle UAC - \angle UAB) = 2 \cdot \angle BAC.$$

A symmetrisch zu B bezüglich U

Aufgabe 4. *Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt U und Sehne BC. Der Punkt A liege auf k, symmetrisch zu B (bzw. C) bezüglich U.*
Erkläre, warum $\angle \mathbf{BUC} = \mathbf{2} \cdot \angle \mathbf{BAC}$.



Wäre A symmetrisch zu C, so verwende dieselbe Begründung, unter Vertauschung der Rollen von B und C.

Dieser Beweis verläuft etwas einfacher als die letzten beiden.
Da der Abstand von U zu den Eckpunkten des Dreiecks ABC jeweils gleich dem Umkreisradius R ist, ist das Dreieck ACU wieder wegen $UA = UC = R$ gleichschenkelig, und die Winkel, die den gleich langen Seiten gegenüber liegen sind wieder gleich groß. Wir sehen also, dass wie zuletzt

$$\angle UAC = \angle ACU = y$$

gilt.
Definieren wir nun wieder $\angle BUC = 2\varphi$, gilt

$$\angle CUA = 180° - 2y,$$

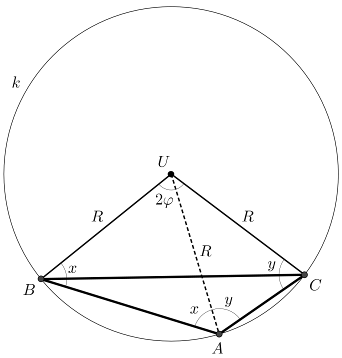
und somit, wie behauptet

$$\angle BUC = 2\varphi = 180° - \angle CUA = 180° - (180° - 2y) = 2y = 2 \cdot \angle UAC.$$

Natürlich sind wir jetzt neugierig zu erfahren, was gilt, wenn der Punkt A auf dem kleineren Kreisbogen liegen sollte.

***A* auf kleinem Kreisbogen**

Aufgabe 5. *Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt U und Sehne BC. Der Punkt A liege auf dem kleineren Bogen BC von k.*
Erkläre, warum $\angle \mathbf{BUC} = \mathbf{2} \cdot (\mathbf{180^\circ} - \angle \mathbf{CAB})$



Auch der Verlauf dieses Beweises ist ganz analog zu den bisherigen.
Da der Abstand von U zu den drei Eckpunkten des Dreiecks ABC jeweils gleich dem Umkreisradius R ist, sind die beiden Dreiecke AUB und ACU wieder wegen $UA = UB = R$ und $UA = UC = R$ jeweils gleichschenkelig, und die Winkel, die den gleich langen Seiten gegenüber liegen jeweils gleich groß. Wir sehen also, dass wiederum

$$\angle ABU = \angle UAB = x \quad \text{und} \quad \angle CAU = \angle UCA = y$$

gilt.
Definieren wir nun wie schon gewohnt $\angle BUC = 2\varphi$, gilt wegen

$$\angle BUC = \angle BUA + \angle AUC$$

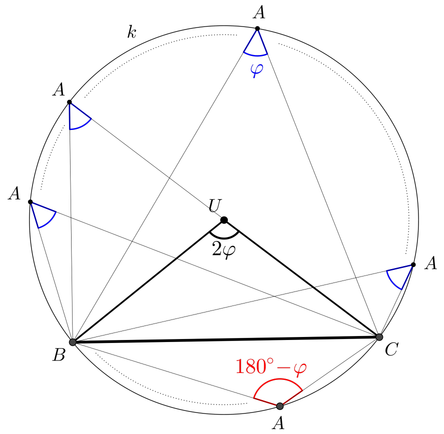
sicher, wie behauptet

$$\angle BUC = \angle BUA + \angle AUC = (180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) = 2 \cdot (180^\circ - (x + y)) = 2 \cdot (180^\circ - \angle BAC).$$

Zentri-Peripherie-Winkelsatz MmF

Zusammenfassend erhalten wir folgendes Ergebnis:
Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt U und Sehne BC, sowie dem Winkel $\angle\mathbf{BUC} = \mathbf{2}\varphi$.
Ist A ein Punkt auf dem großen Bogen BC von k, so gilt $\angle BAC = \varphi$.
Ist A ein Punkt auf dem kleinen Bogen BC von k, so gilt $\angle CAB = 180° - \varphi$.

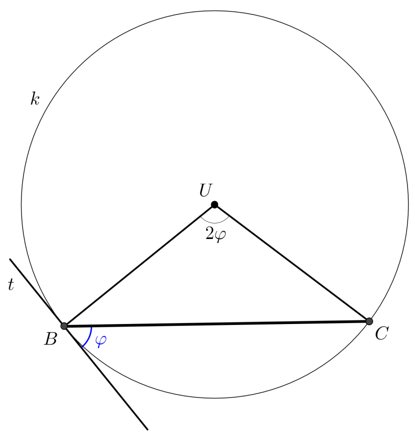
Dieser Satz wird auch als **Randwinkelsatz** bezeichnet.



Der Winkel $\angle BUC = 2\varphi$ wird als **Zentriwinkel bezeichnet**, der Winkel $\angle BAC$ bzw. $\angle CAB$ als **Peripheriewinkel**.

Sehnen-Tangentensatz MmF

Ein damit eng verbundenes Ergebnis ist der folgende Satz:
Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt U und Sehne BC.
Die Tangente an k in einem Endpunkt der Sehne BC schließt mit BC einen Winkel ein, der **halb so groß** wie der Winkel $\angle BUC$ ist.



Wir nehmen zum Zweck dieses Beweises an, dass die Tangente t den Kreis k in B berührt. Der Beweis für die Tangente in C verläuft identisch, unter Vertauschung der Rollen von B und C.
Definieren wir wieder $\angle BUC = 2\varphi$, gilt im gleichschenkeligen Dreieck BCU

$$\angle CBU = \frac{1}{2} \cdot (180° - 2\varphi) = 90° - \varphi.$$

Da die Tangente t normal zum Berührradius UB steht, gilt somit, wie behauptet

$$\angle t, BC = 90° - \angle CBU = 90° - (90° - \varphi) = \varphi.$$

Dasselbe gilt für die Tangente in C.

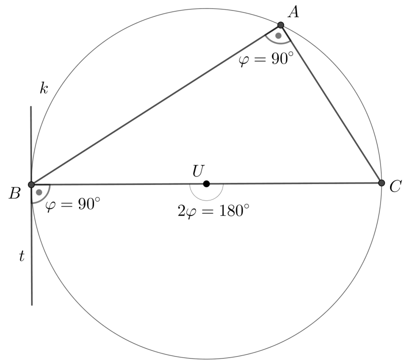
Spezialfall: Satz von Thales

Wir können nun diese beiden Ergebnisse mit dem **Satz von Thales** vergleichen.
Die **Sehne** BC wählen wir zu diesem Zweck speziell als **Durchmesser von** k.
In diesem Fall ist der Umkreismittelpunkt U der Mittelpunkt von BC, und es gilt $\angle BUC = 180°$.
Der Zentri-Peripherie-Winkelsatz sagt uns, dass $\angle BAC$ und $\angle t, BC$ gleich groß sind, und halb so groß wie $\angle BUC$.

Mit $\angle BUC = 180° = 2\varphi$ erhalten wir in der Tat

$$\angle BAC = \angle t, BC = 90° = \varphi.$$

Diese Aussage über $\angle BAC$ ist genau der Satz von Thales.
Die Aussage über den Winkel zwischen t und BC entspricht einfach der Tatsache, dass BC in diesem Fall ein Durchmesser von k ist, und die Tangente in einem Endpunkt des Durchmessers normal zum Durchmesser steht.



Umkehrung des Peripheriewinkelsatz

Über eine Strecke BC werden in derselben Halbebene die Punkte A und D so gewählt, dass $\angle BAC = \angle BDC = \varphi$ gilt.
Dann liegen die vier Punkte A, B, C und D auf einem gemeinsamen Kreis.

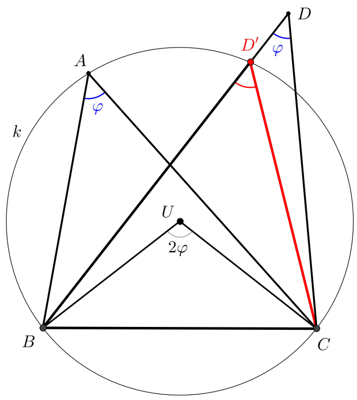
Sei k der Umkreis des Dreiecks ABC. Wir nehmen an, dass D nicht auf k liegt. Dann liegt D entweder innerhalb oder außerhalb von k.

Wir können eines annehmen, die Begründung im anderen Fall ist gleich.

Sei D außerhalb und D' der Schnittpunkt von BD mit k.
Laut Zentri-Peripherie-Winkelsatz gilt

$$\angle BUC = 2 \cdot \angle BAC = 2\varphi$$

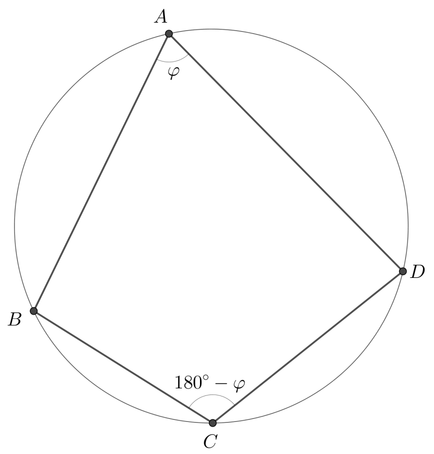
Erkläre, warum die Punkte D' und D zusammenfallen und somit die Annahme falsch war und D doch auf k liegt.



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BD'C = \angle BAC = \varphi$. Somit ist $\angle CD'D = 180° - \varphi$. Das Dreieck $CD'D$ ist also entartet, da $\angle DCD' = 0°$ ist, somit gilt $D' = D$, und D liegt auf k.

Sehnenviereck

Zum Abschluss bemerken wir noch, dass wir mit dieser Satzgruppe auch die kennzeichnende Eigenschaft eines **Sehnenvierecks**, also eines **Vierecks mit Umkreis**, entdeckt haben.



Liegen nämlich die vier Eckpunkte A, B, C und D eines Vierecks auf einem gemeinsamen Kreis, so ergänzen einander nach dem Peripheriewinkelsatz gegenüberliegende Winkel $\angle BAD$ und $\angle DCB$ immer auf 180°, da einer dieser Winkel gleich φ, also der Hälfte des Zentriwinkels 2φ der Sehne BC ist, und der andere gleich $180° - \varphi$.